

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ
INFORMATION TECHNOLOGY AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 536.2 (075)

DOI:10.21822/2073-6185-2023-50-3-92-99



Оригинальная статья/ Original article

**Дополнительные функции и дополнительные краевые условия в задачах
теплопроводности для многослойных тел**

Р.М. Клеблеев

Самарский государственный технический университет,
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Россия

Резюме. Цель. Цель исследования состоит в разработке методики получения аналитического решения задачи теплопроводности для 2-х слойной пластины при граничных условиях 1-го рода. **Метод.** В основу метода исследования положен интегральный метод. При этом вводится дополнительная функция (ДФ), дополнительные краевые условия (ДКУ) и локальные системы координат. ДФ описывает температуру во времени в одной из точек двухслойной системы. Ее использование сводит уравнение в частных производных к обыкновенному уравнению. ДКУ позволяют выполнить уравнения на границах. **Результат.** Показано, что удовлетворение уравнений на границах приводит к их выполнению и внутри области. Отметим, что дополнительные краевые условия выполняются при любом другом методе получения аналитических решений. Отличие лишь в том, что они не принимаются в виде условий, подлежащих отдельному рассмотрению. Дополнительная функция также является величиной, которая определяется при любом другом методе получения решения. Отличие лишь в том, что она не выделяется для отдельного рассмотрения. **Вывод.** Можно констатировать, что введение дополнительной функции и дополнительных краевых условий не искажает исходную постановку задачи и является лишь средством для существенного упрощения процесса получения приближенного аналитического решения и окончательного выражения для него.

Ключевые слова: многослойные конструкции, дополнительная функция, ДКУ, интегральный метод, локальные координаты, приближенное решение.

Для цитирования: Р.М. Клеблеев. Дополнительные функции и дополнительные краевые условия в задачах теплопроводности для многослойных тел. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2023; 50(3):92-99. DOI:10.21822/2073-6185-2023-50-3-92-99

**Additional functions and additional boundary conditions in heat conduction problems
for multilayer bodies**

R.M. Klebleev

Samara State Technical University,
244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443100, Russia

Abstract. Objective. The purpose of the study is to develop a technique for obtaining an analytical solution to the thermal conductivity problem for a 2-layer plate under boundary conditions of the 1st kind. **Method.** The research method is based on the integral method. In this case, an additional function (DF), additional boundary conditions (ABC) and local coordinate systems are introduced. The DF describes the temperature over time at one of the points of the two-layer system. Its use reduces the partial differential equation to an ordinary equation. DKUs allow you to perform equations on boundaries. **Result.** It is shown that satisfying the equations on the boundaries leads to their fulfillment inside the domain. Note that additional boundary conditions are satisfied for any other method of obtaining analytical solutions. The only difference is that they are not accepted as conditions subject to separate consideration. An additional function is also a

quantity that is determined by any other method of obtaining a solution. The only difference is that it is not singled out for separate consideration. **Conclusion.** It can be stated that the introduction of an additional function and additional boundary conditions does not distort the original formulation of the problem and is only a means to significantly simplify the process of obtaining an approximate analytical solution and the final expression for it.

Key words: multilayer structures, additional function, DKU, integral method, local coordinates, approximate solution.

For citation: R.M. Klebleev. Additional functions and additional boundary conditions in heat conduction problems for multilayer bodies. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Science. 2023; 50(3):92-99. DOI:10.21822/2073-6185-2023-50-3-92-99

Введение. При получении аналитических решений краевых задач для многослойных тел должны удовлетворяться условия сопряжения. Их получение затрудняется тем, что относительно собственных чисел получаются многопараметрические трансцендентные уравнения, решения которых находятся численными методами [2-4].

На основе обобщённых функций в работах [2-4] многослойное тело сводится к одному слою, имеющему переменные свойства, что позволяет исключить проблему выполнения условий сопряжения. В работах [5-7] решение задач для многослойных тел выполняется путем применения точных и приближенных методов при использовании координатных функций, удовлетворяющих условиям сопряжения. В конечном итоге решению подлежит алгебраический полином для нахождения собственных чисел. В настоящей работе используется метод, основанный на определении ДФ и ДКУ [8 - 18], а также локальных систем координат.

Постановка задачи. Цель исследования состоит в разработке методики получения аналитического решения задачи теплопроводности для 2-х слойной пластины при граничных условиях 1-го рода. Рассмотрим теплопроводность в двухслойной пластине в постановке вида (рис.1)

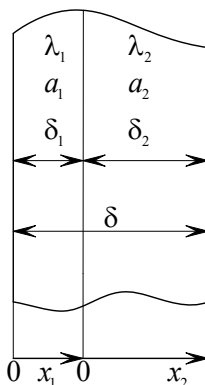


Рис. 1. Схема локальных координат

Fig. 1. Local coordinate scheme

$$\frac{\partial T_1(x_1, t)}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} ; \quad (t > 0; \quad 0 < x_1 < \delta_1) ; \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_2(x_2, t)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} ; \quad (t > 0; \quad 0 < x_2 < \delta_2) ; \quad (2)$$

$$T_1(x_1, 0) = T_0 ; \quad (3)$$

$$T_2(x_2, 0) = T_0 ; \quad (4)$$

$$T_1(0, t) = T_{\text{ст}} ; \quad (5)$$

$$T_1(\delta_1, t) = T_2(0, t) ; \quad (6)$$

$$\lambda_1 \partial T_1(\delta_1, t) / \partial x_1 = \lambda_2 \partial T_2(0, t) / \partial x_2 ; \quad (7)$$

$$\partial T_2(\delta_2, t) / \partial x_2 = 0 , \quad (8)$$

где T_i , x_i , ($i = 1, 2$) – температура и координата; t – время; δ_i , a_i , λ_i , ($i = 1, 2$) – толщина, температуропроводность и теплопроводность; T_0 – начальная температура; $T_{\text{ст}}$ – температура стенки; $\delta = \delta_1 + \delta_2$.

Обозначим

$$\Theta_i = \frac{T_i - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}}, \quad (i = 1, 2) ; \text{Fo} = \frac{a_1 t}{\delta^2} ; \xi_1 = \frac{x_1}{\delta} ; \xi_2 = \frac{x_2}{\delta} ; \Delta_1 = \frac{\delta_1}{\delta} ; \Delta_2 = \frac{\delta_2}{\delta} , \quad (9)$$

где Θ_i , ($i = 1, 2$) – безразмерная температура; Fo – безразмерное время; ξ_1 , ξ_2 – безразмерные координаты слоев; Δ_1 , Δ_2 – безразмерные толщины каждого слоя.

С учётом (9) задача (1) – (8) будет

$$\frac{\partial \Theta_1(\xi_1, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta_1(\xi_1, \text{Fo})}{\partial \xi_1^2} , \quad (\text{Fo} > 0; 0 < \xi_1 < \Delta_1) ; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Theta_2(\xi_2, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{a_2}{a_1} \frac{\partial^2 \Theta_2(\xi_2, \text{Fo})}{\partial \xi_2^2} , \quad (\text{Fo} > 0; 0 < \xi_2 < \Delta_2) ; \quad (11)$$

$$\Theta_1(\xi_1, 0) = 1 ; \quad (12)$$

$$\Theta_2(\xi_2, 0) = 1 ; \quad (13)$$

$$\Theta_1(0, \text{Fo}) = 0 ; \quad (14)$$

$$\Theta_1(\Delta_1, \text{Fo}) = \Theta_2(0, \text{Fo}) ; \quad (15)$$

$$\lambda_1 \partial \Theta_1(\Delta_1, \text{Fo}) / \partial \xi_1 = \lambda_2 \partial \Theta_2(0, \text{Fo}) / \partial \xi_2 ; \quad (16)$$

$$\partial \Theta_2(\Delta_2, \text{Fo}) / \partial \xi_2 = 0 . \quad (17)$$

Методы исследования. Рассмотрим ДФ, представляющую температуру в точке $\xi_2 = \Delta_2$.

$$q(\text{Fo}) = \Theta_2(\Delta_2, \text{Fo}), \quad (18)$$

Решение разыскивается в виде

$$\Theta_1(\xi_1, \text{Fo}) = \sum_{k=1}^n b_k(q) \varphi_{1k}(\xi_1) ; \quad (19) \quad \Theta_2(\xi_2, \text{Fo}) = \sum_{k=1}^n b_k(q) \varphi_{2k}(\xi_2), \quad (20)$$

где $b_k(q)$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_{1k}(\xi_1)$, $\varphi_{2k}(\xi_2)$ – координатные функции.

Ввиду принятия для каждого слоя одинаковой системы коэффициентов $b_k(q)$, двухслойная пластина приводится к однослойной, но с переменными свойствами среды.

Рассмотрим построение координатных функций, удовлетворяющих условиям (14) – (17). Формулы для них запишем в виде

$$\varphi_{1k}(\xi_1) = \xi_1 - \xi_1^{2k} ; \quad (21)$$

$$\varphi_{2k}(\xi_2) = B_{1k} + B_{2k} \xi_2 - B_{3k} \xi_2^{2k} , \quad (22)$$

где B_{1k} , B_{2k} , B_{3k} – неизвестные константы.

Соотношение (19) с функцией (21) удовлетворяет граничному условию (14).

Для определения B_{1k} , B_{2k} , B_{3k} подставим (21), (22) в (15) – (17).

Из решения системы трех алгебраических уравнений находим: $B_{1k} = \Delta_1 - \Delta_1^{2k}$; $B_{2k} = N(1 - 2k\Delta_1^{2k-1})$; $B_{3k} = B_{2k} / (2k\Delta_2^{2k-1})$; $N = \lambda_1 / \lambda_2$. С учётом B_{1k} , B_{2k} , B_{3k} (22) будет

$$\varphi_{2k}(\xi_2) = \Delta_1 - \Delta_1^{2k} + N(1 - 2k\Delta_1^{2k-1}) \left(\xi_2 - \frac{\xi_2^{2k}}{2k\Delta_2^{2k-1}} \right). \quad (23)$$

Учитывая (21) – (23) формулы (19), (20) удовлетворяют условиям (14) – (17). Незвестные коэффициенты $b_k(q)$ находятся из (18) и некоторых ДКУ. Для их нахождения продифференцируем (14) по Fo

$$\frac{\partial \Theta_1(0, Fo)}{\partial Fo} = 0. \quad (24)$$

С учётом (10) соотношение (24) приводится к ДКУ вида

$$\partial^2 \Theta_1(0, Fo) / \partial \xi_1^2 = 0. \quad (25)$$

Продифференцируем (25) по Fo

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \left(\frac{\partial \Theta_1(0, Fo)}{\partial Fo} \right) = 0. \quad (26)$$

С учётом (10) соотношение (26) приводится к еще одному ДКУ

$$\partial^4 \Theta_1(0, Fo) / \partial \xi_1^4 = 0. \quad (27)$$

Следовательно, дифференцируя любое предыдущее ДКУ по Fo, с учётом (10) можно найти любое их число. Их общая формула будет

$$\partial^{2i} \Theta_1(0, Fo) / \partial \xi_1^{2i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (28)$$

В точке $\xi_2 = \Delta_2$ имеем также условие (18), поэтому необходимо найти ДКУ на основе этого соотношения. Производная от (18) по Fo имеет вид

$$\partial q(Fo) / \partial Fo = \partial \Theta_2(\Delta_2, Fo) / \partial Fo. \quad (29)$$

С учётом (11) выражение (29) приводится к ДКУ вида

$$\partial^2 \Theta_2(\Delta_2, Fo) / \partial \xi_2^2 = \partial q(Fo) / \partial Fo. \quad (30)$$

Определяя производную от Fo, с учётом (11) получаем ещё одно ДКУ

$$\partial^4 \Theta_2(\Delta_2, Fo) / \partial \xi_2^4 = d^2 q(Fo) / dFo^2. \quad (31)$$

Запишем общую формулу для ДКУ в точке $\xi_2 = \Delta_2$

$$\partial^{2i} \Theta_2(\Delta_2, Fo) / \partial \xi_2^{2i} = \partial^i q(Fo) / \partial Fo^i, \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (32)$$

Кроме найденных ДКУ, которые необходимо выполнять в точках $\xi_1 = 0$ и $\xi_2 = \Delta_2$, необходимо также найти ДКУ в точке $\xi_2 = \Delta_2$, используя условие (17). Продифференцируем (17) по Fo

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\partial \Theta_2(\Delta_2, Fo)}{\partial Fo} \right) = 0. \quad (33)$$

Используя (11), находим ДКУ

$$\partial^3 \Theta_2(\Delta_2, Fo) / \partial \xi_2^3 = 0. \quad (34)$$

Определяя производную от Fo, учитывая (11) получаем ещё одно ДКУ при $\xi_2 = \Delta_2$

$$\partial^5 \Theta_2(\Delta_2, Fo) / \partial \xi_2^5 = 0. \quad (35)$$

Запишем общую формулу для них

$$\partial^{2i-1} \Theta_2(\Delta_2, Fo) / \partial \xi_2^{2i-1} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots) . \quad (36)$$

Отметим, что формула (20) с учетом (22) удовлетворяет ДКУ (36).

ДКУ обладают тем свойством, что их выполнение эквивалентно выполнению на границах уравнений (18), (11). В [17, 18] доказывается, что в этом случае исходные уравнения оказываются выполненными и внутри области.

В первом приближении, подставив (19), (20) в (18), (28), (32) ($i = 1$), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} b_1 \varphi_{21}(\Delta_2) + b_2 \varphi_{22}(\Delta_2) - b_3 \varphi_{23}(\Delta_2) &= q(Fo); \\ b_1 \varphi''_{11}(0) + b_2 \varphi''_{12}(0) - b_3 \varphi''_{13}(0) &= 0; \\ b_1 \varphi''_{21}(\Delta_2) + b_2 \varphi''_{22}(\Delta_2) - b_3 \varphi''_{23}(\Delta_2) &= q'(Fo), \end{aligned} \quad (37)$$

где $\varphi''_{11} = d^2 \varphi_{11} / \partial \xi_1^2$; $\varphi''_{12} = d^2 \varphi_{12} / \partial \xi_1^2$; $\varphi''_{13} = d^2 \varphi_{13} / \partial \xi_1^2$; $\varphi''_{21} = d^2 \varphi_{21} / \partial \xi_2^2$; $\varphi''_{22} = d^2 \varphi_{22} / \partial \xi_2^2$; $\varphi''_{23} = d^2 \varphi_{23} / \partial \xi_2^2$; $q' = dq(Fo) / dFo$.

Решение системы (37)

$$b_1(q) = 0; \quad b_2(q) = -\frac{2}{3}(q'\eta_1 + q\eta_2)/\eta; \quad b_3(q) = (q'\eta_3 + q\eta_4)/\eta, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} \eta &= \lambda_2 / (\lambda_1 (28\lambda_2 \Delta_1^4 + 72\lambda_2 \Delta_1^9 + 120\Delta_2 \lambda_1 \Delta_1^8 - 20\Delta_2 \lambda_1 \Delta_1^3 - 108\lambda_2 \Delta_1^6 - 30\Delta_2 \lambda_1 \times \\ &\times \Delta_1^5 + 8\lambda_2 \Delta_1 + 5\Delta_2 \lambda_1)); \quad \eta_1 = \Delta_2 (6\lambda_2 \Delta_1^6 + 30\Delta_2 \Delta_1^5 \lambda_1 - 5\Delta_2 \lambda_1 - 6\lambda_2 \Delta_1); \quad \eta_2 = 30 \times \\ &\times \lambda_1 (6\Delta_1^5 - 1); \quad \eta_3 = \Delta_2 (12\lambda_1 \Delta_1^3 \Delta_2 - 3\Delta_2 \lambda_1 + 4\lambda_2 \Delta_1^4 - 4\lambda_2 \Delta_1); \quad \eta_4 = 12\lambda_1 (4\Delta_1^3 - 1). \end{aligned}$$

Формулы (19), (20) с учетом (38) будут

$$\Theta_1(\xi_1, Fo) = -\frac{2}{3}(q'\eta_1 + q\eta_2)\varphi_{12}/\eta + (q'\eta_3 + q\eta_4)\varphi_{13}/\eta; \quad (39)$$

$$\Theta_2(\xi_2, Fo) = -\frac{2}{3}(q'\eta_1 + q\eta_2)\varphi_{22}/\eta + (q'\eta_3 + q\eta_4)\varphi_{23}/\eta. \quad (40)$$

Потребуем выполнения следующего интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta_1} \left(\frac{\partial \Theta_1(\xi_1, Fo)}{\partial Fo} - \frac{\partial^2 \Theta_1(\xi_1, Fo)}{\partial \xi_1^2} \right) d\xi_1 + \\ + \int_0^{\Delta_2} \left(\frac{\partial \Theta_2(\xi_2, Fo)}{\partial Fo} - \frac{a_2}{a_1} \frac{\partial^2 \Theta_2(\xi_2, Fo)}{\partial \xi_2^2} \right) d\xi_2 = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Подставив (39), (40) в (41), имеем

$$K \frac{d^2 q}{dFo^2} + L \frac{dq}{dFo} + Mq = 0, \quad (42)$$

где $K = 0,58$, $L = 1,082$, $M = 0,0766$ при исходных данных вида:
 $a_1 = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $a_2 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\lambda_1 = 45,24 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$; $\lambda_2 = 16,24 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$; $\delta_1 = 0,002 \text{ м}$; $\delta_2 = 0,004 \text{ м}$; $\Delta_1 = 0,33$; $\Delta_2 = 0,67$.

Из решения (42) имеем

$$q(Fo) = C_1 \exp\left(-\frac{(L^2 - 4KM)^{1/2} + L}{2K} Fo\right) + C_2 \exp\left(\frac{(L^2 - 4KM)^{1/2} - L}{2K} Fo\right), \quad (43)$$

где C_1, C_2 – константы интегрирования.

Составим интегралы взвешенных невязок условий (12), (13), и потребуем выполнения условия их ортогональности к функциям $\varphi_{1k}(\xi_1)$, $\varphi_{2k}(\xi_2)$ ($k=1, 2$). Отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\Delta_1} [\Theta_1(\xi_1, 0) - 1] \varphi_{11}(\xi_1) d\xi_1 + \int_0^{\Delta_2} [\Theta_2(\xi_2, 0) - 1] \varphi_{21}(\xi_2) d\xi_2 &= 0; \\ \int_0^{\Delta_1} [\Theta_1(\xi_1, 0) - 1] \varphi_{12}(\xi_1) d\xi_1 + \int_0^{\Delta_2} [\Theta_2(\xi_2, 0) - 1] \varphi_{22}(\xi_2) d\xi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Подставляя (39), (40) в (44), для C_1 и C_2 получаем два алгебраических уравнения, решение которых: $C_1 = -1,307$; $C_2 = 1,608$.

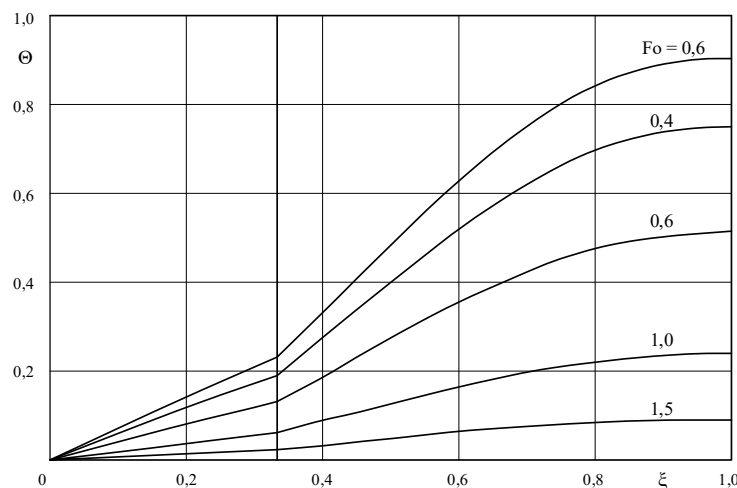


Рис. 2. Распределение температуры: расчеты по (19), (20) при $n = 3$

Fig. 2. Temperature distribution: calculations according to (19), (20) at

Обсуждение результатов. На рис. 2 даны результаты, полученные по формулам (19), (20) ($n = 3$). На рис. 3 даны результаты для случая приведения двухслойной системы к однослойной ($n = 3$), то есть при $\lambda_1 = \lambda_2$, $a_1 = a_2$. Из анализа следует, что при $0,4 < Fo < \infty$ отличие от точного решения [19, 20] не более 6 %.

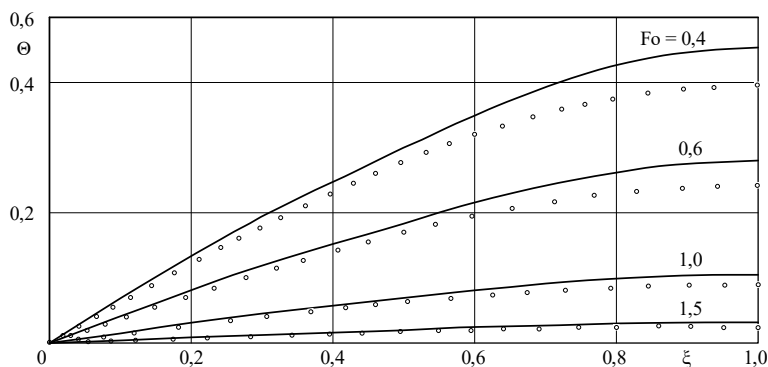


Рис. 3. Распределение температуры при $\lambda_1 = \lambda_2$ и $a_1 = a_2$. — по (19), (20) при $n = 3$; $\circ$ – точное решение [19, 20]

Fig. 3. Temperature distribution at and $\lambda_1 = \lambda_2$ и $a_1 = a_2$. – according to (19), (20) at ; $n = 3$; $\circ$ – exact solution [19, 20]

Вывод. Используя координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям и условиям сопряжения, на основе ДФ и ДКУ разработана методика нахождения приближенного решения задачи теплопроводности для двухслойной пластины.

Для упрощения получения решения использованы локальные координаты, что позволяет упростить и процесс получения решения, и окончательные выражения для него.

ДФ вводятся с целью приведения уравнения в частных производных к обыкновенному уравнению. ДКУ позволяют выполнить исходные дифференциальные уравнения на границах, что приводит к их выполнению и внутри областей.

Библиографический список:

1. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высшая школа, 1978. 328 с.
2. Коляно Ю.М. Применение обобщенных функций в термомеханике кусочно-однородных тел. В кн.: Математические методы и физико-механические поля. Вып.7. Киев: наукова думка, 1978. С.7
3. Коляно Ю.М., Попович В.С. Нестационарное температурное поле в состыкованных пластинах // Физика и химия обработки материалов. 1975. №5. С.16
4. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978.
5. Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. М.: Высшая школа, 2005. 430 с.
6. Цой П.В. Методы расчета отдельных задач тепломассопереноса. М.: Энергия, 1971. 384с.
7. Цой П.В. Методы расчета задач тепломассопереноса. М.: Энергоатомиздат, 1984. 416 с.
8. Био М. Вариационные принципы теплообмена. М.: Энергия, 1975. 208с.
9. Глазунов Ю.Т. Вариационные методы. М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. 470 с.
10. Гудмен Т. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена // Проблемы теплообмена. Сборник научных трудов. М.: Атомиздат, 1967. С. 41 – 96.
11. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В. Получение аналитического решения задачи Стефана с учетом абляции на основе определения фронта температурного возмущения // Инженерно-физический журнал. 2012. Т. 85, № 6. С.1332 – 1342.
12. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности. М.: ЛИБРОКОМ, 2011. 280 с.
13. Кудинов В.А., Стефанюк Е.В. Аналитический метод решения задач теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий // Инженерно-физический журнал. 2009. Т. 82, №3. С. 540 – 558.
14. Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В. Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях. М.: Высшая школа, 2008. 305с.
15. Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А. Анализ нелинейной теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения // Теплофизика высоких температур, 2006. Т. 44, №5, С. 577 – 585.
16. Кудряшов Л.И., Меньших Н.Л. Приближенные решения нелинейных задач теплопроводности. М.: Машиностроение, 1979. 232с.
17. Кудинов И.В., Котова Е.В., Кудинов В.А. Метод получения аналитических решений краевых задач на основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искомых функций. Сибирский журнал вычислительной математики. Новосибирск. 2019. Т. 22, № 2. С.153 – 165.
18. Федоров Ф.М. Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000. 220 с.
19. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
20. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.

References

1. Belyaev N.M., Ryadno A.A. Methods of unsteady thermal conductivity. M.: Higher School, 1978; 328 (In Russ).
2. Kolyano Yu.M. Application of generalized functions in thermomechanics of piecewise homogeneous bodies. In the book: Mathematical methods and physical and mechanical fields. Issue 7. Kiev: Naukova Dumka, 1978; 7
3. Kolyano Yu.M., Popovich V.S. Unsteady temperature field in joined plates. Physics and chemistry of materials processing. 1975; 5:16 (In Russ).
4. Kech V., Teodorescu P. Introduction to the theory of generalized functions with applications in technology. M.: Mir, 1978. (In Russ).
5. Kudinov V.A., Kartashov E.M., Kalashnikov V.V. Analytical solutions to problems of heat and mass transfer and thermoelasticity for multilayer structures. M.: Higher School, 2005; 430. (In Russ).
6. Tsoi P.V. Methods for calculating individual heat and mass transfer problems. M.: Energy, 1971; 384. (In Russ).
7. Tsoi P.V. Methods for calculating heat and mass transfer problems. M.: Energoatomizdat, 1984; 416. (In Russ).

8. Biot M. Variational principles of heat transfer. M.: Energy, 1975; 208 (In Russ).
9. Glazunov Yu.T. Variational methods. M.: Izhevsk: Research Center "Regular and Chaotic Dynamics"; Institute for Computer Research, 2006; 470. (In Russ).
10. Goodman T. Application of integral methods in nonlinear problems of unsteady heat transfer./ Problems of heat transfer. Collection of scientific papers. M.: Atomizdat, 1967; 41 – 96. (In Russ).
11. Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V. Obtaining an analytical solution to the Stefan problem taking into account ablation based on determining the front of a temperature disturbance. *Engineering and Physical Journal*. 2012;85(6):1332 – 1342.(In Russ).
12. Kudinov V.A., Kudinov I.V. Methods for solving parabolic and hyperbolic heat equations. M.:LIBROKOM, 2011;280 .(In Russ).
13. Kudinov V.A., Stefanyuk E.V. Analytical method for solving heat conduction problems based on determining the front of temperature disturbance and additional boundary conditions. *Engineering and Physical Journal*. 2009; 82(3): 540 – 558(In Russ).
14. Kudinov V.A., Averin B.V., Stefanyuk E.V. Thermal conductivity and thermoelasticity in multilayer structures. M.: Higher School, 2008; 305 (In Russ).
15. Kudinov V.A., Averin B.V., Stefanyuk E.V., Nazarenko S.A. Analysis of nonlinear thermal conductivity based on determining the front of temperature disturbance . *Thermophysics of high temperatures*, 2006; 44 (5): 577 – 585. (In Russ).
16. Kudryashov L.I., Menshikh N.L. Approximate solutions of nonlinear heat conduction problems. M.: Mechanical Engineering, 1979; 232.(In Russ).
17. Kudinov I.V., Kotova E.V., Kudinov V.A. A method for obtaining analytical solutions to boundary value problems based on the determination of additional boundary conditions and additional required functions. *Siberian Journal of Computational Mathematics*. Novosibirsk 2019;22,(2):153 – 165.(In Russ).
18. Fedorov F.M. Boundary method for solving applied problems of mathematical physics. Novosibirsk: Nauka, 2000; 220 (In Russ).
19. Kartashov E.M. Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids. M.: Higher School, 2001; 550 (In Russ).
20. Lykov A.V. Theory of thermal conductivity. M.: Higher School, 1967; 600 (In Russ).

Сведения об авторе:

Клеблеев Руслан Мухтарович, старший преподаватель, кафедра «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика», uio1123@list.ru

Information about the author:

Ruslan M. Klebleev, Senior Lecturer, Department of "Theoretical foundations of heat engineering and hydromechanics", uio1123@list.ru

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов/The author declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/ Received 23.07.2023.

Одобрена после рецензирования / Reviced 14.08.2023.

Принята в печать /Accepted for publication 14.08.2023.