

МЕХАНИКА И МАШИНОСТРОЕНИЕ

УДК 539.3

Агаханов Э.К.

О РАЗВИТИИ КОМПЛЕКСНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Agakhanov E.K.

ABOUT DEVELOPMENT OF COMPLEX DECISION METHODS OF THE PROBLEMS OF DEFORMABLE SOLID BODY MECHANICS

Из постановки задачи в перемещениях для возможных случаев эквивалентной замены нагрузок формулируются необходимые и достаточные условия существования аналогии, позволяющей представить действие вынужденной деформации в виде суммы воздействий поверхностных и объемных сил, объемных сил в виде суммы воздействия поверхностных сил и вынужденных деформаций, поверхностных сил в виде суммы вынужденных деформаций и объемных сил.

Ключевые слова: механика деформируемого твердого тела, комплексный метод, эквивалентность воздействий, напряженно-деформированное состояние.

From the setting of the problem in the transferences for possible cases of equivalent substitution of loads are formulated the necessary and sufficient condition of existence of analogy, allowing to represent the action of forced deformation in the form of sum of influence of surface and bulky forces, bulky forces in the form of sum of influence of surface forces and forced deformations, surface forces in the form of sum of forced deformations and bulky forces.

Key words: deformable solid body mechanics, complex method, equivalency of influences, strained-deformed state.

Практика строительства постоянно обогащается новыми точными, экспериментально - теоретически обоснованными знаниями, и объем активных информационных ресурсов по отношению к общему объему накопленных профессиональных знаний повышается. В связи с этим и при решении задач механики деформируемого твердого тела по обеспечению и максимальному использованию прочности материала с целью достижения минимальной стоимости и материалоемкости элементов и конструкций зданий и сооружений широко используют вычислительную технику. Полемизируя с существующим мнением, что современные численные методы позволяют решить практически любую задачу механики, необходимо отметить, что аналитические и экспериментальные методы по-прежнему являются актуальными, и именно комплекс методов ведут к развитию механики деформируемого твердого тела. В настоящее время одним из важнейших направлений развития механики деформируемого твердого тела является создание подходов, позволяющих органично сочетать колоссальные вычислительные возможности современных суперкомпьютеров с экспериментальными методами исследования материалов и конструкций.

В статической задаче механики деформируемого твердого тела все воздействия в зависимости от их присутствия в разрешающей системе уравнений подразделяются на поверхностные силы P_i , объемные силы F_i и дисторсии или вынужденные деформации ξ .

Известно существование частичной эквивалентности воздействий, заключающееся в тождественном равенстве (анalogии) напряжений или перемещений при действии

различных видов нагрузки [1, 2]. В ряде работ рассмотрена аналогия между действием объемных и поверхностных сил, существующая лишь при наличии жестких ограничений [3, 4].

В настоящей статье формулируются необходимые и достаточные условия существования аналогии, позволяющей представить действие вынужденной деформации в виде суммы воздействий поверхностных и объемных сил, объемных сил в виде суммы воздействия поверхностных сил и вынужденных деформаций, поверхностных сил в виде суммы вынужденных деформаций и объемных сил. Представляемая аналогия важна при экспериментальном решении задач, так как осуществимость каждого воздействия ограничена возможностями техники моделирования.

Рассмотрим тело произвольной формы, занимающее область V с поверхностью $B=B_1+B_2$. На участке поверхности B_1 заданы перемещения f_i , на участке B_2 действуют поверхностные нагрузки и имеется система закреплений. На тело, помимо поверхностных нагрузок, действуют объемные силы и вынужденные деформации.

Перемещения U_i в области V независимо от связности тела удовлетворяют уравнениям:

$$U_{i,jj} + U_{j,ij} + 2S_{,i} + \frac{F_i}{G} = 0 \quad \text{в } V; \quad (1)$$

$U = f_i$ на B_1 (это условие сохраняется во всех последующих рассуждениях и в дальнейших рассуждениях опускается);

$$2G[0,5(U_{i,j} + U_{j,i}) + \delta_{ij}S]n_j = P_i \quad \text{на } B_2, \quad (2)$$

где
$$S = \frac{\nu}{E} \sigma_{ii} - \xi \quad \text{в } V, \quad (3)$$

при $\nu \neq 0,5$ эта зависимость имеет вид:

$$S = \frac{\nu}{1-2\nu} U_{j,j} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \xi. \quad (4)$$

Рассмотрим возможные случаи эквивалентной замены нагрузок.

1. Требуется определить напряженно-деформированное состояние, вызываемое действием только вынужденной деформации ξ .

Уравнения (1) и условия (2) в этом случае имеют вид

$$U_{i,jj}^{(\xi)} + U_{j,ij}^{(\xi)} + 2S_{,i}^{(\xi)} = 0 \quad \text{в } V; \quad (5)$$

$$2G[0,5(U_{i,j}^{(\xi)} + U_{j,i}^{(\xi)}) + \delta_{ij}S^{(\xi)}]n_j = 0 \quad \text{на } B_2. \quad (6)$$

Пусть в распоряжении исследователя имеются методы, позволяющие определять напряженно-деформированное состояние от действия поверхностных P_i и объемных F_i сил.

Уравнения (1) и условия (2) примут вид

$$U_{i,jj}^{(P,F)} + U_{j,ij}^{(P,F)} + 2S_{,i}^{(P,F)} + \frac{F_i}{G} = 0 \quad \text{в } V; \quad (7)$$

$$2G[0,5(U_{i,j}^{(P,F)} + U_{j,i}^{(P,F)}) + \delta_{ij}S^{(P,F)}]n_j = P_i \quad \text{на } B_2. \quad (8)$$

Условия тождественного равенства перемещений $U_i^{(\xi)} \equiv U_i^{(P,F)}$ следующие:

$$2S_{,i}^{(\xi)} = 2S_{,i}^{(P,F)} + \frac{F_i}{G} \quad \text{в } V; \quad (9)$$

$$2GS^{(\xi)}n_i = 2GS^{(P,F)}n_i - P_i \quad \text{на } B_2. \quad (10)$$

Далее, с учетом (4), получим

$$P_i = \frac{E}{1-2\nu} \xi n_i; \quad (11)$$

$$F_i = -\frac{E}{1-2\nu} \xi_{,i}. \quad (12)$$

Из выражения (11) следует, что необходимым и достаточным условием применимости аналогии является дифференцируемость функции вынужденной деформации ξ в V и ее непрерывность на B_2 .

Напряжения от действия вынужденных деформаций ξ определяются с помощью зависимостей

$$\sigma_{ij}^{(\xi)} = 2G[0,5(U_{i,j}^{(\xi)} + U_{j,i}^{(\xi)}) + \delta_{ij}S^{(\xi)}]. \quad (13)$$

Напряжения от заменяющих нагрузок F_i, P_i

$$\sigma_{ij}^{(P,F)} = 2G[0,5(U_{i,j}^{(P,F)} + U_{j,i}^{(P,F)}) + \delta_{ij}S^{(P,F)}]. \quad (14)$$

При $U_i^{(\xi)} \equiv U_i^{(P,F)}$ имеем

$$\sigma_{ij}^{(\xi)} = \sigma_{ij}^{(P,F)} + \delta_{ij}2G[S^{(\xi)} - S^{(P,F)}]. \quad (15)$$

С учетом (4)

$$\sigma_{ij}^{(\xi)} = \sigma_{ij}^{(P,F)} - \delta_{ij} \frac{E}{1-2\nu} \xi. \quad (16)$$

Приведенный результат широко известен как аналогия С. П. Тимошенко и используется для обоснования экспериментального метода «размораживания» свободных температурных деформаций [4, 5], применяемого при решении задачи термоупругости.

2. Для общности рассмотрим возможность представления напряженно-деформированного состояния тела при действии заданной поверхностной нагрузки P_i в виде суммы напряженно-деформированных состояний от действия объемных сил F_i и вынужденных деформаций ξ .

Исходной системой уравнений и граничными условиями являются

$$U_{i,jj}^{(P)} + U_{j,ij}^{(P)} + 2S_{,i}^{(P)} = 0 \quad \text{в } V; \quad (17)$$

$$2G[0,5(U_{i,j}^{(P)} + U_{j,i}^{(P)}) + \delta_{ij}S^{(P)}]n_j = P_i \quad \text{на } B_2. \quad (18)$$

Система уравнений и граничные условия заменяющих нагрузок

$$U_{i,jj}^{(F,\xi)} + U_{j,ij}^{(F,\xi)} + 2S_{,i}^{(F,\xi)} + \frac{F_i}{G} = 0 \quad \text{в } V; \quad (19)$$

$$2G[0,5(U_{i,j}^{(F,\xi)} + U_{j,i}^{(F,\xi)}) + \delta_{ij}S^{(F,\xi)}]n_j = 0 \quad \text{на } B_2. \quad (20)$$

Условия тождественного равенства перемещений $U_i^{(P)} \equiv U_i^{(F,\xi)}$ после преобразований, аналогичных (9) и (10), имеют вид

$$P_i = \frac{E}{1-2\nu} \xi n_i; \quad (21)$$

$$F_i = \frac{E}{1-2\nu} \xi_{,i}. \quad (22)$$

Условия применимости аналогии в этом случае те же, что и в случае 1.

Напряжения определяются из зависимостей

$$\sigma_{ij}^{(P)} = \sigma_{ij}^{(F,\xi)} + \delta_{ij} 2G[S^{(P)} - S^{(F,\xi)}] = \sigma_{ij}^{(F,\xi)} + \delta_{ij} \frac{E}{1-2\nu} \xi. \quad (23)$$

3. Наибольший интерес представляет возможность получения напряженно-деформированного состояния от заданных объемных сил F_i в виде напряженно-деформированного состояния, вызываемого суммарным воздействием вынужденных деформаций ξ и поверхностных нагрузок P_i .

Система уравнений и граничные условия искомого решения имеют вид

$$U_{i,jj}^{(F)} + U_{j,ij}^{(F)} + 2S_{,i}^{(F)} + \frac{F_i}{G} = 0 \quad \text{в } V; \quad (24)$$

$$2G[0,5(U_{i,j}^{(F)} + U_{j,i}^{(F)}) + \delta_{ij} S^{(F)}]n_j = 0 \quad \text{на } B_2. \quad (25)$$

Система уравнений и граничные условия заменяющих нагрузок

$$U_{i,jj}^{(P,\xi)} + U_{j,ij}^{(P,\xi)} + 2S_{,i}^{(P,\xi)} = 0 \quad \text{в } V; \quad (26)$$

$$2G[0,5(U_{i,j}^{(P,\xi)} + U_{j,i}^{(P,\xi)}) + \delta_{ij} S^{(P,\xi)}]n_j = P_i \quad \text{на } B_2. \quad (27)$$

Условия тождественного равенства перемещений $U_i^{(F)} \equiv U_i^{(P,\xi)}$ после преобразований, аналогичных (9) и (10), имеют вид

$$\frac{E}{1-2\nu} \xi_{,i} = -F_i; \quad (28)$$

$$\frac{E}{1-2\nu} \xi n_i + P_i = 0, \quad (29)$$

откуда следует, что условием применимости аналогии в этом случае является потенциальность объемных сил F_i в V и непрерывность их потенциала на B_2 .

Напряжения в этом случае определяются из зависимости

$$\sigma_{ij}^{(F)} = \sigma_{ij}^{(\xi,P)} + \delta_{ij} 2G[S^{(F)} - S^{(\xi,P)}] = \sigma_{ij}^{(\xi,P)} + \delta_{ij} \frac{E}{1-2\nu} \xi. \quad (30)$$

В представленном виде аналогия может быть использована для моделирования объемных сил, вызываемых потенциальными полями типа взвешивающего и фильтрационного давления, электростатических и магнитных полей, центробежных ускорений и т.д.

В методическом отношении способы экспериментального определения напряжений и перемещений при действии вынужденных деформаций и поверхностных нагрузок, к которым сводится задача, разработаны с полнотой, достаточной для получения эффективных решений.

Рассмотрим частные случаи применения аналогии.

1. Рассмотрим тело, статически определимое относительно внешних сил под действием объемной силы $F_i = \text{const}$. Заменяющие нагрузки ξ и P_i в этом случае являются линейными функциями координат. Перемещения для искомого случая представляются зависимостью

$$U_i^{(F)} = U_i^{(\xi)} + U_i^{(P)}. \quad (31)$$

Линейное распределение вынужденных деформаций не вызывает напряжений, вследствие чего зависимость (30) принимает вид

$$\sigma_{ij}^{(F)} = \sigma_{ij}^{(P)} + \delta_{ij} \frac{E}{1-2\nu} \xi = \sigma_{ij}^{(P)} - \delta_{ij} P. \quad (32)$$

В частности, когда F_i – сила тяжести, выражение (32) соответствует известной аналогии С. Г. Гутмана [1]. Широко распространено название «анalogии Био - Гутмана». Однако в работе М. Био рассмотрено применение аналогии лишь для плоской задачи [6].

2. Рассмотрим тело из «несжимаемого» материала ($\nu = 0,5$). В этом случае разрешающая система уравнений, помимо (1) и (2), включает дополнительное условие

$$U_{j,j} = 3\xi \quad (33)$$

или при отсутствии вынужденных деформаций

$$U_{j,j} = 0 \quad (34)$$

Для установления аналогии в данном случае необходимо, чтобы

$$\xi \equiv 0, \quad (35)$$

откуда следует, что для несжимаемого тела аналогия С. П. Тимошенко неприменима. В этом случае целесообразно применение метода, предложенного С. Е. Бугаенко [4].

Рассмотрим применение аналогии в случае несжимаемого тела при действии объемных сил F_i . В качестве заменяющей рассматривается поверхностная нагрузка P_i .

Разрешающие системы уравнений и граничные условия имеют соответственно вид (24) – (27) с упрощениями, обусловленными условием (34).

Условия тождественного равенства $U_i^{(F)} \equiv U_i^{(P)}$ имеют вид

$$2S_{,i}^{(F)} + \frac{F_i}{G} = 2S_{,i}^{(P)} \quad \text{в } V; \quad (36)$$

$$2GS^{(F)} n_i = 2GS^{(P)} n_i - P_i \quad \text{на } B_2, \quad (37)$$

откуда следует, что

$$P_i = F_i. \quad (38)$$

Таким образом, известные ранее аналогии, существующие при наличии жестких ограничений, являются лишь частными случаями применения установленной в настоящей статье эквивалентности воздействий.

Замена объемных сил на поверхностные нагрузки и вынужденные деформации позволяет расширить применение экспериментальных методов, а зачастую решить экспериментально - теоретическим путем задачи, решение которых иными методами получить, если не невозможно, то, во всяком случае, достаточно затруднительно. Полученные результаты являются существенным шагом в развитии одного из подходов, сочетающих экспериментальные, аналитические и численные методы решения линейных задач механики деформируемого твердого тела, причем главный эффект достигается не в сокращении объема расчетов (что в настоящее время не принципиально), а в построении правильной интерпретации результатов расчетов, содержащих большие массивы чисел; интерпретации, которая открывает возможность качественного анализа получаемых решений и достижения понимания проблемы, которое и позволяет решать задачу прочности, надежности и экономичности изделий.

В качестве примера рассматривается аналитическое решение трехмерной задачи о вращающемся диске из несжимаемого материала методом эквивалентности воздействий.

Круглый диск постоянной толщины из несжимаемого материала находится под действием объемных центробежных сил

$$F_x = \rho \omega^2 x, \quad F_y = \rho \omega^2 y, \quad F_z = 0,$$

где: ρ - масса единицы объема, ω - угловая скорость диска.

При решении трехмерной задачи о вращающемся диске в работе [3], сначала находят частное решение, удовлетворяющее уравнениям равновесия и условиям совместности, а затем на него налагают решение в форме полинома пятой степени и подбирают постоянные в нем таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям задачи.

Напряжения $\sigma_z^{(F)}$ и $\tau_{rz}^{(F)}$ в диске от объемных центробежных сил равны нулю (плоское напряженное состояние), а напряжения $\sigma_r^{(F)}$ и $\sigma_\theta^{(F)}$ - меняются по толщине диска и являются функциями от r и z .

Тогда, согласно установленной эквивалентности воздействий, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(F)} &= \sigma_z^{(P)} - \sigma_z^{(\xi)} - P, \\ \tau_{rz}^{(F)} &= \tau_{rz}^{(P)} - \tau_{rz}^{(\xi)}, \\ \sigma_r^{(F)} &= \sigma_r^{(P)} - P, \\ \sigma_\theta^{(F)} &= \sigma_\theta^{(P)} - P, \end{aligned} \quad (39)$$

где заменяющие поверхностные силы P и вынужденные деформации ξ имеют вид

$$P = \frac{\rho \omega^2 r^2}{2}, \quad (40)$$

$$\xi = \frac{\rho \omega^2 r^2}{4E}. \quad (41)$$

Для определения напряженного состояния диска, находящегося под действием заменяющих поверхностных сил, можно использовать функцию напряжений в форме полинома пятой степени [3]

$$\varphi = a_5(8z^5 - 40r^2z^3 + 15r^4z) + b_5(2z^5 - r^2z^3 - 3r^4z). \quad (42)$$

Выражения для компонентов напряжений с учетом (42) имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(p)} &= -a_5(180r^2 - 240z^2) + b_5(9r^2 + 60z^2), \\ \sigma_z^{(p)} &= -a_5(-240r^2 + 480z^2) + b_5(42z^2 - 75r^2), \\ \sigma_\theta^{(p)} &= a_5(-60r^2 + 240z^2) + b_5(60z^2 - 15r^2), \\ \tau_{rz}^{(p)} &= 480a_5rz - 42b_5rz. \end{aligned} \quad (43)$$

Определяя постоянные a_5 и b_5 таким образом, чтобы при $z = \pm c$ или $r = a$ $\tau_{rz}^{(p)} = 0$ и при $z = \pm c$ $\sigma_z^{(p)} = P$, получаем

$$\sigma_r^{(p)} = \rho \omega^2 \left[\frac{1}{16} r^2 - \frac{3}{4} z^2 \right],$$

$$\sigma_{\theta}^{(p)} = \rho\omega^2 \left[\frac{3}{16} r^2 - \frac{3}{4} z^2 \right]. \quad (44)$$

Чтобы удовлетворить граничное условие на контуре диска для радиальных напряжений $\sigma_r^{(p)}$, т.е. добиться выполнения условия

$$\left(\int_{-c}^c \sigma_r^{(p)} dz \right)_{r=a} = \rho\omega^2 a^2 c$$

наложим на напряжения (44) однородное радиальное растяжение величиной

$$\rho\omega^2 \left[\frac{7}{16} a^2 + \frac{3}{4} \frac{c^2}{3} \right].$$

Тогда полные напряжения от заменяющих поверхностных сил определяются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(p)} &= \rho\omega^2 \left[\frac{1}{16} r^2 + \frac{1}{4} (c^2 - 3z^2) + \frac{7}{16} a^2 \right], \\ \sigma_{\theta}^{(p)} &= \rho\omega^2 \left[\frac{3}{16} r^2 + \frac{1}{4} (c^2 - 3z^2) + \frac{7}{16} a^2 \right]. \end{aligned} \quad (45)$$

Подставляя (40) и (45) в (39) получаем решение исходной задачи

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(F)} &= \rho\omega^2 \left[\frac{7}{16} (a^2 - r^2) + \frac{1}{4} (c^2 - 3z^2) \right], \\ \sigma_{\theta}^{(F)} &= \rho\omega^2 \left[\frac{7}{16} a^2 - \frac{5}{16} r^2 + \frac{1}{4} (c^2 - 3z^2) \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Полученное решение тождественно совпадает с известным ранее решением в случае несжимаемости материала диска. Поскольку задача решается проще, чем ранее известным методом, то можно отметить эффективность использования метода эквивалентности воздействий при получении аналитического решения данной задачи. Сочетание аналитических решений с возможностями современных суперкомпьютеров также имеет большое значение в современной вычислительной механике.

Библиографический список:

1. Гутман С. Г., Приведение силы тяжести упругого тела к внешней гидростатической нагрузке. Изв. НИИ гидротехники, 1934, № 11.
2. Лебедев Н.Ф., Об эквивалентности систем сил в механике деформируемых сред. Прикладная механика, 1977, № 2, с.63-68.
3. Тимошенко С.П., Гудьер Дж., Теория упругости. М., Наука, 1975, 576с.
4. Бугаенко С. Е., Моделирование напряжений от заданных несовместных деформаций поляризационно-оптическим методом, Изв. АН СССР, МТТ, 1980, № 4.
5. Метод фотоупругости, Под ред. Г. Л. Хесина, М., Стройиздат, 1975, т. 3.
6. Biot M. A. Distributed gravity and temperature loading in twodimensional elasticity replaced by boundary pressures and dislocations. Trans. ASME. Appl. Mech. 1935. Vol. 2.N 57.