СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
BUILDING AND ARCHITECTURE

УДК 624.044
DOI:10.21822/2073-6185-2023-50-2-169-176 Оригинальная статья /Original Paper

Колебание балки с сосредоточенными массами на упруго-демпфирующих опорах

А.М. Казиев, И. И Кишит, А. М. Жинов, К.М. Карчаев, А.А. Бербеков
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173, Россия

Резюме. Цель. Целью исследования является изучение работы многопролётных балок с точечными массами при одновременном действии векторных кинематических и силовых нагрузок с учётом влияния упругодемпфирующих опор. **Метод.** Исследование основано на решении краевой задачи и моделировании. **Результат.** Исследованы свободные поперечные колебания многопролётных балок постоянного сечения (в пределах каждого j –го пролёта A_j, и G_j) с учётом упругодемпфирующих дискретных опор. Рассмотрены свободные и вынужденные гармонические колебания балки от векторных кинематических и силовых возмущений. Приведены примеры решения для различных условий закреплений трёхпролётной балки при разных точечных массах. **Вывод.** Авторскую разработку можно адаптировать к колебаниям континуально-дискретных стержней. Представленный алгоритм позволяет определять собственные частоты и формы свободных колебаний, а также рассчитывать многопролётные стержни на одновременное действие векторных кинематических и динамических нагрузок.

Ключевые слова: балка, вязкое трение, упругая опора, частота, амплитуда, комплексные функции, собственные формы, динамические и кинематические векторные возмущения

Для цитирования: А.М. Казиев, И. И Кишит, А. М. Жинов, К.М. Карчаев, А.А. Бербеков. Колебание балки с сосредоточенными массами на упруго-демпфирующих опорах. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2023; 50(2):169-176. DOI:10.21822/2073-6185-2023-50-2-169-176

Vibration of a Beam with Concentrated Masses on Elastically Damping Supports

A.M. Kaziev, I.I. Kishit, A.M. Zhinov, K.M. Karchaev, A.A. Berbekov
H.M. Berbekov Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia

Abstract. Objective. The aim of the study is to study the operation of multi-span beams with point masses under the simultaneous action of vector kinematic and force loads. Taking into account the influence of elastic-damping supports. **Method.** The study is based on the solution of the boundary value problem and modeling. **Result.** Free transverse vibrations of multi–span beams of constant cross-section (within each j-th span Aj, and Gj) are investigated taking into account elastic-damping discrete supports. Free and forced harmonic vibrations of the beam from vector kinematic and force perturbations are considered. Examples of solutions for various conditions of fixing a three-span beam at different point masses are given. **Conclusion.** The author's development can be adapted to the fluctuations of the continuo-discrete rods. This algorithm allows you to determine the natural frequencies and forms of free oscillations. It is also possible to calculate multi-span rods for the simultaneous action of vector kinematic and dynamic loads.

Keywords: beam, viscous friction, elastic support, frequency, amplitude, complex functions, eigenforms, dynamic and kinematic vector perturbations

For citation: A.M. Kaziev, I. I. Kishit, A. M. Zhinov, K. M. Karchaev, A.A. Berbekov. Vibration of a Beam with Concentrated Masses on Elastically Damping Supports. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Science. 2023; 50(2): 169-176. DOI:10.21822/2073-6185-2023-50-2-169-176

Введение. Расчётная схема рассматриваемой балки (рис. 1), состоит из n пролётов. На каждом участке имеются размеры l_j площадью сечения A_j, жёсткостью на изгиб G_i.

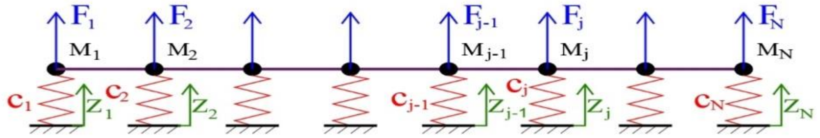

Рис. 1. Расчётная балки с точечными массами и упругодемпфирующим перемещающимися опорами

Fig.1. Analysis beams with point masses and resiliently damping moving supports

В узлах балки расположены точечные массы M_j. Балка поддерживается упруго-демпфирующими опорами с коэффициентами жёсткости c_j и коэффициентами демпфирования ν_j. Колебания вызываются сосредоточенными силами F_j и смещениями опор z_j ($j = 1, 2, ..., N$; $N = n + 1$). Имеем смешанную континуально – дискретную систему. Поперечные колебания состоят из двух систем дифференциальных уравнений. Одна система для континуальных участков в виде однородных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, которая в векторной форме имеет вид

$$\mathbf{G}\circ\mathbf{u}^{IV} + \mathbf{m}\circ\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\eta}\mathbf{m}\circ\dot{\boldsymbol{u}} = \mathbf{0}. \qquad (1)$$

Вторая система представляет собой обыкновенные дифференциальные уравнения для сосредоточенных точечных масс

$$\boldsymbol{M}\circ\ddot{\boldsymbol{v}} + \mathbf{v}\circ\dot{\boldsymbol{v}} + \mathbf{c}\circ(\mathbf{v} - \mathbf{z}) + \mathbf{f} = \mathbf{F}. \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – вектор–функция векторного аргумента, соответствующая смещениям балки; $\mathbf{v}(t)$ - вектор–функция скалярного аргумента отклонения сосредоточенных масс; $x_j \in [0, l_j]$, t – время; $\mathbf{m}$ – вектор погонных масс пролётов балки, $m_j = \rho_j A_j$, ρ – плотность, η – коэффициент вязкого трения; $\mathbf{z}(t)$ -вектор–функция, задающая кинематические перемещения опор; $\mathbf{0}$ – нуль – вектор; (принято обозначение $\mathbf{a}\circ\mathbf{b} = \mathbf{c}$, где $c_i=a_ib_i$). $\mathbf{f}(t)$ – вектор суммы поперечных сил балки слева и справа от сосредоточенных масс

$$f_1(t)= G_1u_1'''(0, t), \qquad f_j(t) = G_ju_j'''(0, t) – G_{j-1}u_{j-1}'''(l_{j-1}, t), \qquad j = 2, 3,...., n;$$

$$f_N(t) = -G_nu_n'''(l_n, t).$$

Постановка задачи. Для свободных колебаний необходимо определить спектр собственных частот, коэффициенты демпфирования и соответствующие им собственные формы. В таком случае $\mathbf{z}(t) \equiv 0$, $\mathbf{F}(t) \equiv 0$.

Уравнение (1) колебаний для произвольного j – го пролёта балки, разделим на G_j и запишем

$$u_j^{IV} +\alpha_j\ddot{u}_j+\beta_j\dot{u}_j = 0, \quad \alpha_j = m_j/G_j, \quad \beta_j = \eta m_j/G_j \qquad (3)$$

К уравнениям (2) присоединяются граничные условия согласно расчётной схеме. Левый конец балки шарнирно оперт, поэтому изгибающий момент равен нулю т. е.

$$G_1 u_1''(0, t) = 0, \ \Rightarrow \ u_1''(0, t) = 0. \qquad (4)$$

Колебания массы M_1 описываются первым уравнением системы (2) с учётом что $v_1(t) = u_1(0,t)$

$$M_1\ddot{u}_1(0,t)+\nu_1\dot{u}_1(0,t)+c_1u_1(0,t)+G_1u_1'''(0,t) = 0. \qquad (5)$$

На стыках участков должны выполняться следующие условия сопряжения:

- перемещения, углы поворота и изгибающие моменты слева и справа от сосредоточенной массы равны между собой

$$u_{j-1}(l_{j-1}, t) = u_j(0, t), \quad u'_{j-1}(l_{j-1}, t) = u'_j(0, t), \ G_{j-1} u''_{j-1}(l_{j-1}, t) = G_j u''_j(0, t); \qquad (6)$$

- колебания сосредоточенных масс m_j описываются уравнениями системы (2) $y_j = u_j(0, t)$ $M_j\ddot{u}_1(0,t)+\nu_j\dot{u}_j(0,t)+c_ju_j(0,t)+G_ju_j'''(0,t) – G_{j-1} u_j'''(l_{j-1},t) = 0, \quad j = 2, 3, …, n.$ (7)

На правом конце балки должны выполняться граничные условия, аналогичные (4), (5)

$$u''_n(l_n, t) = 0, \qquad M_N\ddot{u}_n(0,t) + \nu_N\dot{u}_n(l_n,t) + c_N u_n(l_n,t) - G_n u'''_n(l_n,t) = 0. \tag{8}$$

Методы исследования. Решение задачи (3) - (8) отыскивается с помощью метода разделения переменных

$$u_j(x_j, t) = X_j(x_j)\, e^{\lambda t}, \tag{9}$$

где
$$\lambda = -\varepsilon + i\omega \tag{10}$$

- характеристический показатель, ε и ω – коэффициент затухания и частота свободных колебаний.

Подстановка (9) в (3) - (8) даёт

$$X_j^{IV} - \gamma_j^4\, X_j = 0, \quad \gamma_j^4 = -\alpha_j\lambda^2 - \beta_j\lambda. \tag{11}$$

$$X''_1(0) = 0,\ (\lambda^2 M_1 + \lambda\nu_1 + c_1)X_1(0) + G_1X'''_1(0) = 0,\ \ X_{j-1}(l_{j-1}) = X_j(0), \quad X'_{j-1}(l_{j-1}) = X'_j(0),$$

$$G_{j-1}X''_{j-1}(l_{j-1}) = G_j X''_j(0), (\lambda^2 M_j + \lambda\nu_j + c_j)X_j(0) + G_jX'''_j(0) - G_{j-1}X'''_{j-1}(l_{j-1}) = 0,\ j = 2,3,\ \ldots,\ n,$$

$$X''_n(l_n) = 0, \quad (\lambda^2 M_N + \lambda\nu_N + c_N)X_n(l_n) - G_nX'''_n(l_n) = 0. \tag{12}$$

Общее решение уравнения (11) имеет вид

$$X_j(x_j) = D_{j1}\sin\gamma_j x_j + D_{j2}\cos\gamma_j x_j + D_{j3}\,\mathrm{sh}\,\gamma_j x_j + D_{j4}\,\mathrm{ch}\,\gamma_j x_j, \tag{13}$$

где D_{ji} - произвольные постоянные интегрирования, j – номер пролёта.

Дифференцирование даёт

$$X'_j(x_j) = \gamma_j(D_{j1}\cos\gamma_j x_j - D_{j2}\sin\gamma_j x_j + D_{j3}\,\mathrm{ch}\,\gamma_j x_j + D_{j4}\,\mathrm{sh}\,\gamma_j x_j), \tag{14}$$

$$X''_j(x_j) = \gamma_j^2(-D_{j1}\sin\gamma_j x_j - D_{j2}\cos\gamma_j x_j + D_{j3}\,\mathrm{sh}\,\gamma_j x_j + D_{j4}\,\mathrm{ch}\,\gamma_j x_j), \tag{15}$$

$$X'''_j(x_j) = \gamma_j^3(-D_{j1}\cos\gamma_j x_j + D_{j2}\sin\gamma_j x_j + D_{j3}\,\mathrm{ch}\,\gamma_j x_j + D_{j4}\,\mathrm{sh}\,\gamma_j x_j). \tag{16}$$

Введём обозначения

$p_j = \sin\gamma_j l_j$	$q_j = \cos\gamma_j l_j$	$r_j = \mathrm{sh}\,\gamma_j l_j$	$s_j = \mathrm{ch}\,\gamma_j l_j$
$e_j = \lambda^2 M_j + \lambda\nu_j + c_j$	$a_j = G_j\gamma_j^3$	$\mu_j = \gamma_j/\gamma_{j+1}$	$g_j = G_j\gamma_j^2 / G_{j+1}\gamma_{j+1}^2$
$h_1 = e_k p_n + a_n q_n$	$h_2 = e_k q_n - a_n p_n$	$h_3 = e_k r_n - a_n s_n$	$h_4 = e_k s_n - a_n r_n$

подставим (13)-(16) в (12) и получим систему уравнений

$$\mathbf{Q}(\lambda)\,\mathbf{d} = \mathbf{0} \tag{17}$$

относительно вектора постоянных интегрирования $\mathbf{d} = \{D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{21}, D_{22}, \ldots, D_{n,n-1}, D_{nn}\}$, компонентами которого являются искомые коэффициенты, $\mathbf{Q}(\lambda)$ - квадратная матрица порядка 4n

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} & -1 & & 1 & & & & & \vdots & & & & \\ -a_1 & e_1 & a_1 & e_1 & & & & & \vdots & & & & \\ p_1 & q_1 & r_1 & s_1 & & -1 & & -1 & \vdots & & & & \\ \mu_1 q_1 & -\mu_1 p_1 & \mu_1 s_1 & \mu_1 r_1 & -1 & & -1 & & \vdots & & & & \\ -g_1 p_1 & -g_1 q_1 & g_1 r_1 & g_1 s_1 & & 1 & & -1 & \vdots & & & & \\ a_1 q_1 & -a_1 p_1 & -a_1 s_1 & -a_1 r_1 & -a_2 & e_2 & a_2 & e_2 & \vdots & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & & & \vdots & -p_n & -q_n & r_n & s_n \\ & & & & & & & & \vdots & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{pmatrix}.$$

Строки 3-6 соответствуют условиям сопряжения 1-го и 2-го участков и являются повторяющимися как блок подматрицы. Элементы матрицы **Q** являются функциями характеристического показателя λ и через него - коэффициента затухания колебаний ε и частоты ω. Условие существования решения системы уравнений (2.15) даёт уравнение

$$\det\mathbf{Q}(\lambda) = 0, \tag{18}$$

из которого определяется спектр собственных значений $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$.

Уравнение (18) является трансцендентным и представляет комплексную функцию

$$f_1(\varepsilon, \omega) + i\, f_2(\varepsilon, \omega) = 0.$$

Поэтому коэффициент затухания ε и частота свободных колебаний ω должны определяться из системы двух нелинейных трансцендентных уравнений

$$f_1(\varepsilon, \omega) = 0, \qquad f_2(\varepsilon, \omega) = 0. \tag{19}$$

Далее задача состоит в определении собственных форм каждого участка балки, имеющих вид (13). Следовательно, необходимо ставить вопрос о вычислении постоянных D_{jk} , т. е. об отыскании собственного вектора **d**.

Составим алгоритм счёта, последовательно определяющий D_{jk}. Он состоит в следующем. Положим, что $D_{11} = 1$, исключим из системы уравнений (17) последнее. Порядок системы уравнений становится равным 4n-1, что соответствует количеству оставшихся неизвестных. Запишем получившуюся систему уравнений в виде

$$\mathbf{\Gamma}\ \mathbf{\Delta} = \mathbf{b}, \tag{20}$$

где **Г**- квадратная матрица, получающаяся из **Q** путём вычёркивания первого столбца и последней строки, $\mathbf{\Delta} = \{D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{21}, D_{22},\ldots,D_{n,n-1}, D_{nn}\}$- вектор, остающийся от **d** после исключения D_{11}, $\mathbf{b} = \{0, f_1, -p_1, -\mu_1 q_1, g_1 p_1, -f_1 q_1, \ldots, 0, 0\}$ - вектор-столбец. Решение системы (20) даётся формулой

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Gamma}^{-1}\ \mathbf{b}, \tag{21}$$

$X_j(x_j)$, найденные по (13), являются комплексными функциями. Действительные собственные формы имеют вид

$$\varphi_j^r(x_j) = \mathrm{real}\,[X_j^r(x_j)], \quad r = 1, 2,\ldots\ldots, \quad j = 1, 2,\ldots, n,$$

r – номер собственной формы, j – номер пролёта.

Обсуждение результатов. Рассмотрим свободные колебания балки с тремя участками при следующих входных данных

$$A = 165 \text{ мм}^2;\ \rho = 7850 \text{ кг/м}^3,\ \varepsilon = 0.5\ \text{с}^{-1},\ m_1 = m_4 = 0,\ c_1 = c_4 = \infty.$$

В табл.1 представлены первые три частоты и коэффициента затухания свободных колебаний при вариации параметров m_j, ν_j, c_j, в первой строке $\varepsilon = 0$, в последней строке (№ 8) $l_1 = 1$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м.

Таблица 1. Частоты и коэффициента затухания свободных колебаний при вариации параметров

Table 1. Frequencies and damping coefficients of free vibrations with varying parameters

№№	m_2 кг	c_2 Н/м	ν_2 кг/с	m_3 кг	c_3 Н/м	ν_3 кг/с	ω_1 $с^{-1}$	μ_1 $с^{-1}$	ω_2 $с^{-1}$	μ_2 $с^{-1}$	ω_3 $с^{-1}$	μ_3 $с^{-1}$
1	0	0	0	0	0	0	52,36	0	104,7	0	157,1	0
2	0	0	0	0	0	0	52,12	2,50	104,6	2,50	157,0	2,50
3	0	0	0	0	0	0	50,04	2,20	100,4	2,40	150,7	2,40
4	4	0	0	0	0	0	38,53	2,63	85,3	2,03	150,7	2,40
5	4	500	0	0	0	0	48,21	2,96	87,4	1,90	150,7	2,40
6	4	1000	5	0	0	0	47,44	10,84	86,6	3,94	150,7	2,40
7	4	1000	5	7	500	5	40,74	8,35	66,7	5,82	150,7	2,40
8	4	1000	5	7	500	5	36,32	7,53	61,7	12,02	140,8	5,36

В первой строке специально подобраны данные для контроля как классическую схему однопролётной балки: сосредоточенные массы отсутствуют, коэффициенты трения равны нулю. Также для апробации предлагаемых алгоритмов и численного метода решения системы трансцендентных уравнений. Результаты, полученные численными и аналитическими методами, совпали с хорошей точностью. Анализируя, обнаруживаем следующее. Вторая строка соответствует той же балке, но уже при наличии трения с указанным коэффициентом ε. Ввиду его малости собственные частоты изменились незначительно, но коэффициенты затухания системы приняли значения, предсказуемые по рис.2. Третья частота и коэффициент затухания в первых четырёх строках остаются постоянными опор и демпферов в неподвижных точках балки не сказывается на величине μ_3. Данные четвёртой строки подтверждают ожидаемый факт уменьшения первых двух собственных частот при появлении сосредоточенной массы m_2 и соответствующего демпфера. Добавление опоры с коэффициентом c_2 (строка 5) увеличивает жёсткость нашего механизма и, следовательно, повышает собственные частоты ω_1 и ω_2. Введение же демпфера с коэффициентом ν_2 (строка 6) имеет обратный эффект. Появление второй массы с трением влечёт падение этих частот (строка 7). Строка 8 таблицы и найденные по (15) три собственные формы, представленные на рис. 2, соответствуют балке с уже наиболее общими данными. График первой собственной формы 1 близок прямым линиям. Это говорит о том, что основную роль играют колебания сосредоточенных масс по характерным собственным формам дискретных систем с двумя степенями свободы. В роль континуальных является преобладающей в собственных формах обертонов (кривые 2, 3). Из характера кривой 2 вытекает, что колебания по второй собственной частоте происходят по соответствующим вторым собственным формам колебаний дискретных систем (сосредоточенные массы) и систем с распределёнными параметрами (балка).

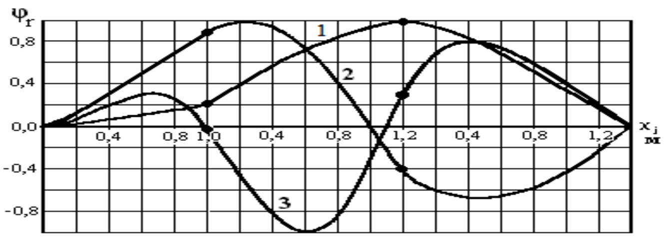

Рис.2. Первые три собственные формы колебаний
Fig.2. The first three eigenmodes

При колебаниях механизма по третьему тону (рис. 3) сосредоточенные массы перемещаются почти синфазно (по второй собственной форме для них), балка же колеблется по формам, подверженным влиянию собственных обертонов третьего порядка. Опоры балок совершают перемещения в поперечном направлении, что служит источником вынужденных колебаний. Пусть возмущения $\mathbf{z}(t)$, возникающие по этим причинам, будут гармоническими с одинаковыми частотами Ω, но при этом с разными амплитудами a_k и начальными фазами α_k

$$z_k(t) = a_k e^{i(\Omega t + \alpha_k)} = A_k e^{i\Omega t}, \qquad A_k = a_k e^{i\alpha_k}. \tag{22}$$

Здесь A_k – комплекснозначные амплитуды, образующие вектор **A**. В таком случае результирующие колебания, совершаемые балкой и дискретными массами, будут гармоническими колебаниями той же частоты. В установившемся режиме пределим функции перемещений и амплитуд колебаний. Тогда начальные условия к системе уравнений (1), (2) не требуются. Краевые условия (3) к уравнениям (1) остаются прежними. Задача (1), (2), (22), имеет общее решение

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x})\, \mathbf{A}\, e^{i\Omega t}, \qquad \mathbf{x} \in (\mathbf{0}, \mathbf{l}), \qquad t > -\infty, \tag{23}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}\, \mathbf{A}\, e^{i\Omega t}, \qquad t > -\infty, \tag{24}$$

где $\mathbf{H}(\mathbf{x})$, $\mathbf{W}$ – матрицы передаточных функций, элементы которых суть реакции пролётов балки и дискретных масс на единичные гармонические возмущения опор; например, $H^{jk}(x_j)$ является амплитудой колебаний j – го пролёта балки при автономном гармоническом единичном возмущении $\xi_k(t) = e^{i\Omega t}$ k – той опоры, аналогично W_{jk} – амплитуда колебаний j – ой сосредоточенной массы. В развёрнутой форме (23) и (24) имеют вид $u^j(x_j, t) = e^{i\Omega t} \sum_{k=1}^{N} H^{jk}(x_j) A_k$, j = 1, 2,…, n; $y^j(t) = e^{i\Omega t} \sum_{k=1}^{N} W_{jk} A_k$, j = 1, 2,…, N.

Выполним простейшие операции упорядочения системы уравнений, объединим системы уравнений, полученные аналогично при возмущениях остальных опор, и запишем матричное уравнение

$$\mathbf{G\,E = F}. \tag{25}$$

Здесь **G** - квадратная матрица порядка 4n × 4n

E, F – прямоугольные матрицы размерности 4n × N.

Здесь нулевые элементы матриц не выписаны, k – ый столбец матрицы **E** соответствует постоянным интегрирования пролётов при возмущении k – той опоры; в частности B_{jk}, D_{jk} – постоянные интегрирования для j – того пролёта при возмущении k – той опоры. Решение матричной системы (25) имеет вид

$$\mathbf{E = G^{-1}F}.$$

Далее легко формируется матрица **H**(**x**); например,

$$H^{jk}(x_j) = B_{jk}\, e^{\lambda_2 x_j} + D_{jk}\; e^{\lambda_2 x_j} \qquad j = 1, 2,\ldots, n, \qquad k = 1, 2, \ldots., N. \tag{26}$$

Теперь можно найти вектор амплитуд колебаний с помощью (23)

$$\mathbf{a}_u(\mathbf{x}) = |\,\mathbf{H}(\mathbf{x})\ \mathbf{A}\,|. \tag{27}$$

Для балки с параметрами, приведёнными в строке 8 табл. п. 3, при кинематических возмущениях $a_1 = a_4 = 0$, $a_2 = a_3 = 10$ мм и сдвигах фаз $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ выполнены расчёты, представленные графиками рис. 3. Кривые соответствуют возрастающим значениям частоты возмущений $\Omega = 20c^{-1}$ (кривая 1); 30 c^{-1}(2); 36,32 c^{-1}(3); 45 c^{-1}(4); 61,7 c^{-1}(5); 115 c^{-1}(6); 140,8 c^{-1}(7). Графики на рис. 3. показывают следующее. Сначала при сравнительно небольших частотах возмущений колебания происходят по первой форме свободных колебаний (см. кривые 2 – 3 и кривую 1 рис. 3).

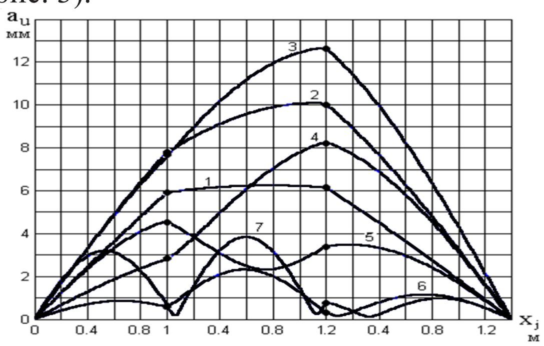

Рис. 3. Амплитуды вынужденных колебаний
Fig.3. Amplitudes of forced vibrations

Наибольшие отклонения соответствуют массе m_3, так как она больше m_2 и поддерживается пружиной с меньшей жёсткостью, а значит, более слабо сопротивляющейся перемещениям дискретной массы. При приближении Ω к первой собственной частоте амплитуды увеличиваются (кривая 2) и достигают наибольших значений при равенстве $\Omega = \omega_1 = 36{,}32$ c^{-1} (кривая 3), т. е. при резонансных колебаниях. С дальнейшим ростом частоты возмущений амплитуды падают (кривая 4), форма их распределения по длине балки постепенно меняется и при $\Omega = \omega_2 = 61{,}7$ c^{-1} (близко ко второй собственной частоте) приобретает очертания (кривая 5), подверженные влиянию второй собственной формы (см. кривую 2 рис. 3).

Эти колебания не носят выраженного резонансного характера по двум причинам. Во-первых, наличие демпфирования опор создаёт для высокочастотных колебаний серьёзные помехи; во-вторых, синфазные возмущения второй и третьей опор плохо согласуются с их возможными перемещениями, находящимися в антифазе при свободных колебаниях.

Интересно при этом заметить, что амплитуды колебаний второй массы, в противоположность предыдущим случаям, больше амплитуд колебаний третьей массы. Причина в том, что отклонения второй массы при свободных колебаниях существенно превышают отклонения третьей массы (кривая 2 рис. 3) Частота возмущений, дающая кривую 6, находится между второй и третьей собственными частотами. Поэтому уже заметно влияние третьей собственной формы (см. кривую 3 рис. 3). Далее при равенстве $\Omega = \omega_3 = 140{,}7$ $с^{-1}$ наблюдается слабо выраженный резонанс по отчётливо просматриваемому распределению амплитуд колебаний, сходному с третьей собственной формой.

Вывод. Анализ кривых показывает, что при низких частотах возмущений (кривые 1 - 4) учёт континуальности участков балки сказывается слабо. Балка является почти кусочно-прямой линией, натянутой между массами, и в целом конструкция ведёт себя как дискретная система. При более высоких же значениях частот (кривые 5 – 7) отклонения дискретных масс незначительны, главную роль играют колебания континуальных участков балок между ними.

Библиографический список:

1. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа. 1979. – 416 с.
2. Джанкулаев А.Я., Казиев А.М. Вынужденные колебания стержней при комбинированных возмущениях // Избранные труды научного семинара «Механика». Вып. 1. Нальчик: Каб.-Балк. гос. сель. акад., 2002. С.195-199.
3. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.
4. Казиев А. М. Колебания однородных и континуально-дискретных балок при векторных гармонических и случайныхвозмущениях: Дис. канд. техн. наук: 05.23.17Нальчик, 2005130 с.РГБ ОД,61:05-5/3003.
5. Культербаев Х.П. Кинематически возбуждаемые колебания континуально-дискретной многопролётной балки // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. Труды X Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. 2011. No4, часть 2. С. 198-200.
6. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
7. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2002. 840 с.
8. Клаф З., Пензиен Дж. Динамика сооружений. М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
9. I.V. Kudinov, V.A. Kudinov. Mathematical simulation of the locally nonequilibrium heat transfer in a body with account for its nonlocality in space and time. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2015; 88(2): 406-422.
10. Amabili, M.,. Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. Cambridge University Press, New York, USA. (2008)
11. Refined beam elements with arbitrary cross-section geometries / E. Carrera, G. Giunta, P. Nali [and others] // Computers andStructures. 2010. V. 88, No 5-6. pp. 283-293.
12. Elishakoff I. Eigenvalues of Inhomogeneous Structures: Unusual Closed-form Solutions. Boca Raton, FL: CRC Press,2005.
13. Hsu J.C., Lai H.Y., Chen C.K. Free vibration of non-uniform EulerBernoulli beams with general elastically end constraintsusing Adomian modified decomposition method. Journal of Sound and Vibration. 2008;318: 965-981.
14. Free vibration behavior of exponential functionally graded beams with varying cross-section / A.A Haasen, T. Abdelouahed,A.M. Sid [and others.] Journal of Vibration and Control. 2011. V. 17, No 2. pp. 311-318.
15. Maurini C., Pofiri M., Pouget J. Numerical methods for modal analysis of stepped piezoelectric beams // Journal of ound andVibration. 2006. V. 298, No 4-5. pp. 918-933.
16. Zheng T. X., Ji T. J. Equivalent representations of beams with periodically variable crosssections // Engineering Structures.2011. V. 33, No 3. pp. 706-719.
17. Tejada A. A Mode-Shape-Based Fault Detection Methodology for Cantilever Beams: Tech. Rep.: CR-2009-215721:NASA, 2009.
18. Alshorbagy A. E., Eltaher M. A., Mahmoud F. F. Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite elementmethod // Applied Mathematical Modelling. 2011. V. 35, No 1. pp. 412-425.
19. Huang Y., Li X. F. A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section //Journal of Sound and Vibration. 2010. V. 329, No 11. pp. 2291-2303.
20. Mohanty S.C., Dash R.R., Rout T. Free vibration of a functionally graded rotating Timoshenko beam using FEM//International Journal of Advanced Structural Engineering. 2013. V. 16, No 2. pp. 405-418.
21. Ke L.L., Yang J., Kitipornchai S. An analytical study on the nonlinear vibration of functionally graded beams // Meccanica.2010. V. 45, No 6. pp. 743-752.
22. Simsek M., Cansiz S. Dynamics of elastically connected doublefunctionally graded beam systems with different boundaryconditions under action of a moving harmonic load. Composite Structures. 2012; 94(9): 2861-2878.

References:

1. Biderman V.L. Applied theory of mechanical oscillations. M.: Higher school. 1979; 416. (In Russ)
2. Dzhankulaev A.Ya., Kaziev A.M. Forced vibrations of rods under combined perturbations. Selected works of the scientificseminar “Mechanics”. Nalchik: Kab.-Balk. State village acad., 2002;(1):195-199.
3. Babakov I.M. Theory of vibrations. M.: Nauka. 1968; 560. (In Russ)

4. Kaziev A. M., Oscillations of Homogeneous and Continuum-Discrete Beams under Vector Harmonic and Random Perturbations,Cand. cand. tech. Sciences: 05.23.17 Nalchik, 2005; 130. RSL OD, 61:05-5/3003. (In Russ)
5. Kulterbaev Kh.P. Kinematically excited vibrations of a continuous-discrete multi-span beam. *Bulletin of the Nizhny NovgorodUniversity. N.I. Lobachevsky. Proceedings of the X All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical andApplied Mechanics.* 2011; 4 (2): 198-200. (In Russ)
6. Timoshenko S.P. Fluctuations in engineering. M.: Nauka. 1967; 444. (In Russ)
7. Verzhbitsky V.M. Fundamentals of numerical methods. M.: Higher school; 2002; 840. (In Russ)
8. Clough Z., Penzien J. Dynamics of structures. M.: Stroyizdat. 1979; 320. (In Russ)
9. I.V. Kudinov, V.A. Kudinov. Mathematical simulation of the locally nonequilibrium heat transfer in a body with account for its nonlocality in space and time. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* 2015; 88(2):406-422.
10. Amabili M. Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. Cambridge University Press, New York, USA. 2008.
11. Refined beam elements with arbitrary cross-section geometries. E. Carrera, G. Giunta, P. Nali [and others]. Computers and Structures. 2010;88(5-6): 283-293.
12. Elishakoff I. Eigenvalues of Inhomogeneous Structures: Unusual Closed-form Solutions. Boca Raton, FL: CRC Press, 2005.
13. Hsu J.C., Lai H.Y., Chen C.K. Free vibration of non-uniform Euler Bernoulli beams with general elastically end constraintsusing Adomian modified decomposition method. *Journal of Sound and Vibration.* 2008;318: 965-981.
14. Free vibration behavior of exponentially functionally graded beams with varying cross-section. A.A Haasen, T. Abdelouahed,A.M. Sid [and others.] *Journal of Vibration and Control*. 2011;17(2):311-318.
15. Maurini C., Pofiri M., Pouget J. Numerical methods for modal analysis of stepped piezoelectric beams. Journal of ound andVibration. 2006; 298(4-5): 918-933.
16. Zheng T. X., Ji T. J. Equivalent representations of beams with periodically variable crosssections. *Engineering Structures.*2011; 33(3): 706-719.
17. Tejada A. A Mode-Shape-Based Fault Detection Methodology for Cantilever Beams: Tech. Rep.: CR-2009-215721: NASA,2009.
18. Alshorbagy A. E., Eltaher M. A., Mahmoud F. F. Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Applied Mathematical Modelling*. 2011; 35(1): 412-425.
19. Huang Y., Li X. F. A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section. *Journal of Sound and Vibration*. 2010; 329(11): 2291-2303.
20. Mohanty S.C., Dash R.R., Rout T. Free vibration of a functionally graded rotating Timoshenko beam using FEM. *International Journal of Advanced Structural Engineering*. 2013;16(2): 405-418.
21. Ke L.L., Yang J., Kitipornchai S. An analytical study on the nonlinear vibration of functionally graded beams. *Meccanica.* 2010; 45(6): 743-752.
22. Simsek M., Cansiz S. Dynamics of elastically connected doublefunctionally graded beam systems with different boundary conditions under action of a moving harmonic load. *Composite Structures.* 2012; 94(9):2861-2878.

Сведения об авторах:

Казиев Аслан Мугазович, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций и механики; 5.kaziev1969@mail.ru

Кишит Идар Ибрахим, аспирант; Edar.kasht@ gmail.com

Жинов Астемир Мухамедович, магистрант; Zhinov.azretali@bk.ru

Карчаев Каншау Муратович, магистрант; kanshau.karchaev@mail.ru

Бербеков Астемир Ахмедович, магистрант; berbekov99@gmail.com

Information about the authors:

Aslan M. Kaziev, Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Prof., Department of Building Structures and Mechanics; kaziev1969@gmail.

Idar I. Kishit, Graduate Student; Edar.kasht@ gmail.com

Astemir M. Zhinov, Master's Student; Zhinov.azretali@bk.ru

Kanshau M. Karchaev, Master's Student; kanshau.karchaev@mail.ru

Astemir A. Berbekov, Master's Student; berbekov99@gmail.com

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/ Received 11. 05.2022.

Одобрена после рецензирования / Reviced 29.05.2023.

Принята в печать /Accepted for publication 29.05.2023.