

References:

1. Balamirzoev A.G. Prediction of deformation bases waterworks on saline soils. A.G.Balamirzoev.- Rostov-na-Donu.: Izd-vo SKNC VSH, 2001.- 201p.
2. Balamirzoev A.G. Development of the theory and methods of suffusion deformations prediction when filtering reschinovatyh grounds waterworks. dissertation doctor of Technical Sciences (05.23.07): 25.05.06: utv.13.10.06 Balamirzoev Abdul Gadzhibalaevich.- Makhachkala, 2006.-409p.
3. Mamedov K. M., Ismailov F. M. A method for solving the convective diffusion equations for the case of filtration in porous media of limited capacity. Scientists universities notes MViSSO AzerbSSR Ser. X, 1973, pp. 41- 47.
4. The hydrodynamic and physico-chemical properties of rocks. Edited by N. N. Verigina. – M. Nedra, 1977- 271p.

УДК 539,41: 629.7.023

Булгаков А.И., Манапов Р.М., Муселемов Х.М., Устарханов О.М.

РАСЧЕТ ТРЕХСЛОЙНЫХ БАЛОК ПО МЕТОДУ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ПОМОЩЬЮ ПК ЛИРА

Bulgakov A. I., Manapov R. M., Muselemov Kh.M., Ustarkhanov O.M.

CALCULATION OF THREE-LAYER BEAMS BY THE FINITE ELEMENT-METHOD WITH THE HELP OF LIRA PC

Аннотация. В настоящее время широкой популярностью у инженеров и научных работников пользуются программные комплексы, в основе которых заложен метод конечных элементов (МКЭ). Основной концепцией МКЭ является непосредственная дискретизация рассчитываемой системы, которая расчленяется расчетной сеткой на конечные элементы. В статье рассмотрены вопросы сходимости метода конечных элементов МКЭ для пластинчатых элементов.

На основании сделанных предположений выполнен численный эксперимент расчета напряженно-деформированного состояния трехслойной балки и произведено сравнение результатов с теоретическими данными, полученными по результатам расчета трехслойных балок (ТБ) проведенными по методу изложенном в справочнике Кобелева В.Н.

Ключевые слова: метод конечных элементов, сходимость, трехслойные балки, узловые переменные, линейная теория упругости, программные комплексы.

Abstract. *Currently very popular among engineers and scientists are the software systems, which are based on the finite element method (FEM).*

The basic concept of the finite element method is a direct discretization of the calculated system that is divided by the calculated net into finite elements.

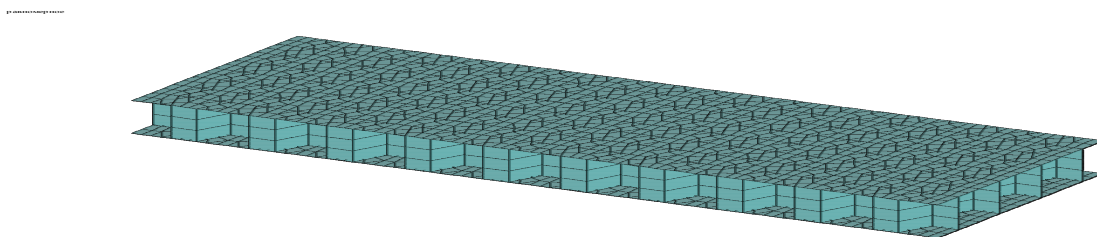
In the paper are considered the questions of convergence of the finite element method for plate elements.

Based on the premises made is carried out the numerical calculation experiment of the stress-strained state of three-layer beams and compared the results with theoretical data obtained from the results of the calculation of three-layer beam (TB) by the method described in the Kobelev V.N reference book

Key words: *finite element method, convergence, three-layer beams, the nodal variables, the linear elasticity theory, software systems.*

Введение. Трехслойные балки представляют собой сложную пространственную структуру, образованную верхним и нижним несущими слоями, а также сотовой конструкцией заполнителя. Соединение несущих слоев с сотовым заполнителем осуществляется с помощью клея (рис.1).

а)



б)

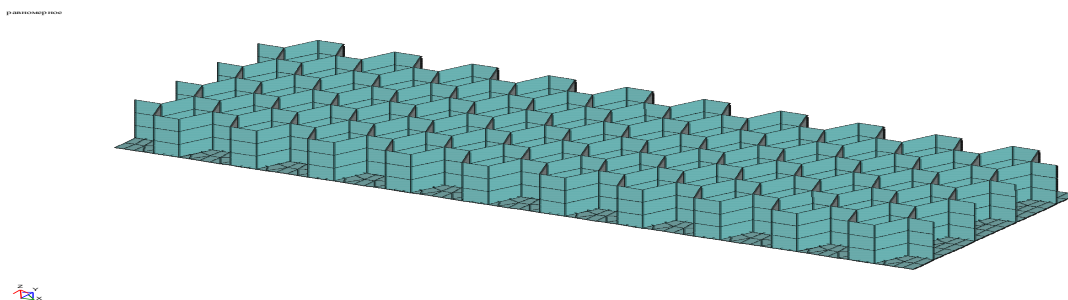


Рисунок 1 – Трехслойная балка а) общий вид; б) сотовый заполнитель

Конструкция трехслойной балки сама по себе является весьма жесткой при работе на плоский изгиб, что делает ее весьма привлекательной для применения в реальных конструкциях, особенно учитывая ее относительную легкость [2]. В настоящее время расчет трехслойных конструкций (ТК) ведется различ-

ными методами. Одним из наиболее распространенным является метод, изложенный в книге [1] под редакцией Кобелева В.Н.

Развитие компьютерных технологий привело к созданию большого количества программ расчета прочности и устойчивости конструкций, основанных на различных методах строительной механики и теории упругости которое можно использовать для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) трехслойных конструкций.

Революцию в строительной механике и теории упругости произвело появление метода конечных элементов (МКЭ). Неограниченные возможности реализации компьютерных моделей на основе МКЭ обусловили разработку новых методов математической физики для решения задач динамики, устойчивости, физической и геометрической нелинейности.

В настоящее время широкой популярностью у инженеров и научных работников пользуются программные комплексы, в основе которых заложен метод конечных элементов (МКЭ), однако лишь единицы из них ориентированы на строительную область [3]. Так в России и странах ближнего зарубежья наибольшей популярностью пользуются программные комплексы STARK и MicroFe (Россия), SCAD и LIRA (Украина) основанные на нормах и стандартах данного региона.

Постановка задачи. Исходя из вышеизложенных предпосылок, авторами сделан выбор в пользу программного комплекса LIRA (ПК ЛИРА).

Рассмотрим основные положения МКЭ реализованные в ПК ЛИРА. Выбор расчетной схемы для МКЭ в перемещениях легко поддается алгоритмизации, что делает этот метод привлекательным с точки зрения применения современных компьютерных технологий. В основе МКЭ лежит линейная теория упругости, уравнения равновесия для которой могут быть записаны в следующем виде:

$$Au \equiv -B^T(DBu) + f = 0, \quad (1)$$

где B – матричный линейный дифференциальный оператор, с помощью которого вектор деформации $\varepsilon(u)$ выражается через вектор перемещений u , $\varepsilon(u) = Bu$; D – матрица упругости, определяющая линейную связь между векторами напряжений σ и деформаций ε , $\sigma = D\varepsilon$ (закон Гука); B^T – транспонированная матрица.

Потенциальную энергию деформации обозначим

$$П(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (DBu)(Bu) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u) \varepsilon(u) d\Omega \quad (2)$$

Работу внешних сил выразим формулой

$$W(u) = \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega, \quad (3)$$

а полную энергию

$$J(u) = \Pi(u) + W(u) \quad (4)$$

Из формулы вытекает, что функция u является решением дифференциального уравнения (1). Функционал полной энергии вида (4) представляет собой функционал Лагранжа, условием минимума которого являются равенства принципа возможных перемещений – при любом возможном перемещении v сумма возможных работ внутренних и внешних сил равна нулю. Обозначим:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (DBu)(Bv) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma(u) \varepsilon(v) d\Omega \quad \text{– возможная работа внутренних сил;}$$

$$(f, v) = W(v) = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega \quad \text{– возможная работа внешних сил.}$$

Тогда принцип возможных перемещений запишется в виде:

$$a(u, v) + (f, v) = 0. \quad (5)$$

Левая часть равенства (5) является производной функционала полной энергии (4). Задача решения уравнений равновесия (1) и вариационная задача минимизации функционала (4), т.е. нахождения функции u , удовлетворяющей (5), эквивалентны, т.е. имеют одно и то же решение.

Вариационная постановка задачи имеет определенные преимущества, которые вытекают из того, что порядок производных в (4) понижается в 2 раза. Это позволяет более удобно формулировать граничные условия, смягчить требования к базисным функциям и более просто представить разностные выражения.

Методы исследования. Метод конечных элементов относится к вариационным методам, т.к. позволяет отыскивать минимум функционала (4) на основе уравнений (5). Основной концепцией МКЭ является непосредственная дискретизация рассчитываемой системы, которая расчленяется расчетной сеткой на конечные элементы. Искомая функция перемещений по области системы $u(x)$, $x \in \Omega$ приближенно может быть принята в виде:

$$u_h(x) = \sum_{l=1}^L q_l \varphi_l(x), \quad (6)$$

где L - общее число узловых неизвестных.

Следует помнить, что в каждом узле может быть различное число неизвестных, т.к. на некоторые из них могут быть наложены связи.

На основе подстановки (6) в (5) задача определения непрерывной функции $u(x)$ сводится к определению значений конечного числа узловых неизвестных q_l , которые находят из системы уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q_l} I(u_h) &= \frac{d}{dq_l} (\Pi(u_h) - W(u_h)) = \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{1}{2} a(u_h, u_h) - (f, u_h) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{1}{2} a \left(\sum_{j=1}^L q_j \varphi_j, \sum_{j=1}^L q_j \varphi_j \right) - \left(f, \sum_{j=1}^L q_j \varphi_j \right) \right) = \\ &= a(u_h, \varphi_l) + (f, \varphi_l) = \sum_{j=1}^L q_j \int_{\Omega} DB \varphi_j B \varphi_l d\Omega + \int_{\Omega} f \varphi_l d\Omega = 0\end{aligned}\quad (7)$$

при $l=1, 2, \dots, L$

Решая систему (7) будем полагать, что $u_h(x)$ удовлетворяет главным граничным условиям. По найденным из (7) значениям q_l на основе (6) определяется функция перемещений по области системы, а по ней на основе известных соотношений теории упругости и другие компоненты напряженно-деформированного состояния.

Обозначим:

$$K_{l,j} = \int_{\Omega} (DB \varphi_j) B \varphi_l d\Omega = a(\varphi_j, \varphi_l); \quad P_l = \int_{\Omega} f \varphi_l d\Omega = (f, \varphi_l) \quad (8)$$

Матрицу K с элементами $K_{l,j}$ называют матрицей жесткости или матрицей системы уравнений МКЭ, вектор P с элементами P_l - вектором нагрузок и вектором правых частей.

Обозначим через q вектор узловых неизвестных, тогда уравнение (7) в матричном виде будет:

$$Kq + P = 0 \quad (9)$$

Расчленение системы на конечные элементы, выполненные на первом этапе расчета, дает возможность представить возможные работы деформаций и внешних сил в виде сумм по отдельным элементам:

$$a(u, v) = \sum_r a_r(u, v), \quad (f, v) = \sum_r (f, v)_r.$$

Такой подход позволяет составить элементы матрицы K и вектора P из отдельных компонентов. Так, lj -элемент матрицы K и l -элемент вектора P определяются по формулам

$$K_{lj} = \sum_{r \in lj} K_{ljr}; \quad P_l = \sum_{r \in l} P_{lr},$$

где $r \in lj, r \in l$ – суммирование по всем элементам, содержащим l и j узловые неизвестные; K_{ljr}, P_{lr} – компоненты матрицы жесткости и вектора узловых сил r – конечного элемента, которые определяются аналогично (8):

$$K_{ljr} = \int_{\Omega_r} (B\varphi_l)^T DB(\varphi_j) d\Omega_r; \quad P_{lr} = \int_{\Omega_r} \varphi_l^T f d\Omega_r. \quad (10)$$

Это позволяет строить разрешающую систему уравнений МКЭ (7) на основе рассмотрения каждого отдельного конечного элемента.

После выбора системы базисных функций $\{\varphi_l\}$ процедура МКЭ представляется достаточно формализованной. Выбор $\{\varphi_l\}$ является самым ответственным этапом, так как определяет сходимость метода, точность решения задачи, разрешимость системы (7). Линейная независимость базисных функций проверяется достаточно легко и, как правило, выполняется для МКЭ автоматически.

На основе работы [4] можно сформулировать требования, которым должны удовлетворять функции φ_l , чтобы обеспечить сходимость МКЭ:

- система базисных функций $\{\varphi_l\}$ должна принадлежать энергетическому пространству H_A дифференциального оператора задачи A . То есть представление разрешающей функции u должно удовлетворять главным граничным условиям и обеспечивать существование по всей области Ω тех перемещений и их производных, которые входят в функционал (4);
- функции φ_l должны быть линейно независимыми, для разрешимости системы (7);
- система базисных функций $\{\varphi_l\}$ должна быть полна в энергетическом пространстве оператора A .

Принадлежность к энергетическому пространству оператора A устанавливается существованием компонентов напряженно-деформированного состояния, которые входят в соответствующий функционал.

По области конечных элементов это требование, как правило, удовлетворяется автоматически, поэтому необходимо проверять неразрывность соответствующих компонентов только по линиям или поверхностям контактов конечного элемента.

Так как для изгибаемых плит и оболочек дифференциальный оператор A имеет четвертый порядок, а в функционал Лагранжа входят вторые производные по перемещениям, то необходимо обеспечить непрерывность, как перемещений, так и их первых производных по линиям контакта.

Обсуждение результатов. Основываясь на выше приведенных выкладках, было принято решение об использовании МКЭ при решении задачи расчета

трехслойных балок. В качестве расчетной схемы использовалась система вертикальных и горизонтальных пластин, со следующими характеристиками:

1. Несущие слои (горизонтальные пластины) – толщина 1мм, материал: алюминий Д16-АТ ($E=69000\text{МПа}$, $\nu=0.34$, $\rho=26.8\text{кН/м}^3$);
2. Сотовый наполнитель (вертикальные пластины) – толщина 0.12мм, материал: алюминий АМГ2-Н ($E=69000\text{МПа}$, $\nu=0.34$, $\rho=26.8\text{кН/м}^3$).

Расчетная длина балки принята 70см. Высота балки – 6см. Ширина балки варьировалась в зависимости от размера сот и составляла 4 полных соты. Ширина элементов, образующих соты составляла 5, 10, 15 и 25мм.

Условие опирания – жесткие заделки. Нагрузка на балку – равномерно распределенная, интенсивностью от 1,0 – 6,5кН/м².

Исходя из вида работы и напряженно-деформированного состояния элементов в качестве расчетных были приняты четырех- и трех- узловые конечные элементы пологих оболочек. Сопряжение элементов между собой принято жестким, что обеспечивает выполнение условия совместности перемещений и их производных входящих в функционал (4). Линейная независимость базисных функций проверяется для МКЭ автоматически. Полнота системы базисных функций также выполняется, так как порядок полинома, выражаемого линейными комбинациями функции φ_{jg} , $p=m$ ($p=2$, порядок полинома; $2m=4$ – порядок дифференциального оператора A). Таким образом, сходимость решений доказана.

Результаты численного эксперимента приведены на рис. 2.

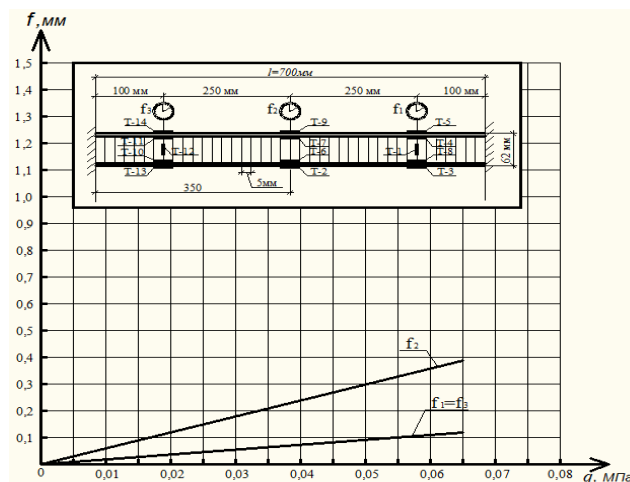


Рисунок 2- График прогибов полученных в результате расчета с применением МКЭ (ПК ЛИРА).

$f_{\max}=0.39\text{мм}$.

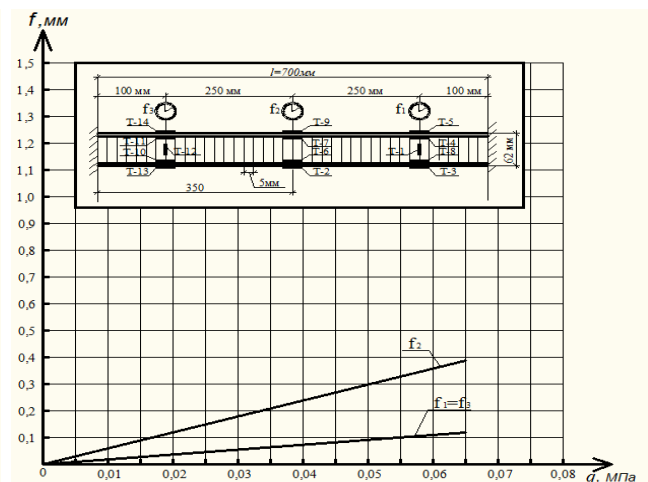


Рисунок 3- График прогибов полученных в работе В.Н. Кобелева [1].

$f_{\max}=0.389\text{мм}$.

Для сравнения приведены результаты расчета ТБ по методу изложенному в [1] (рис. 3).

Вывод. Сравнение результатов аналитического и численного методов, показывает достаточно хорошее совпадение вычисляемых параметров, что подтверждает правильность выбранной модели метода конечных элементов и принятый тип конечных элементов.

Библиографический список:

1. Кобелев В.Н. «Расчёт трёхслойных конструкций». М.:Машиностроение, 1984. 304с.
2. Панин В.Ф. «Конструкции с сотовым заполнителем». М.:Машиностроение, 1982. 152с.
3. А.С. Городецкий, И.Д. Евзеров. Компьютерные модели конструкций. Москва: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2009.360с.
4. Михлин С.Г. Вариационные методы математической физики. – М.:Наука, 190. – 512 с.

References:

1. Kobelev V. N. «Calculation of sandwich structures». М.:Mashinostroenie, 1984. 304p.
2. Panin, V. F., «design of honeycomb». М.:Mashinostroit-nie, 1982. 152p.
3. A. S. Gorodetski, I. D. Evzerov. Computer models of designs. Moscow: Publishing house Association building universities, 2009.360 p.
4. Mikhlin S. G. Variational methods in mathematical physics. – М.:Nauka, 190. – 512 p.

УДК 550.34; 622, 831

Магомедов Р.А.

ОЦЕНКА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД

Magomedov R.A.

EVALUATION OF STRESS-STRAIN STATE OF ROCK MASS

Аннотация. Предложен новый способ определения напряженно-деформированного состояния массива горных пород без пропуска отдельных его участков на основе совмещения наблюдений за динамикой пьезометрического уровня в специальных гидрогеологических скважинах заранее спланированной сети и изменением диаметра скважин измеряемого фотоупругими датчиками.

С началом формирования напряженно-деформированного состояния геологической среды, хаотичная структура гидрогеодинамического поля (ГГД-поля) переходит в аномальное состояние определенной формы, в соответствии с геометрической формой и размерами геологической структуры. Замкнутые линии равных аномальных значений пьезометрических уровней образуют кольцевые геометрические структуры, в центральных частях которых наблюда-