

УДК 624.131.54

**Баламирзоев А.Г., Зербалиев А.М., Курбанов К.О.**

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫЩЕЛАЧИВАНИЯ СОЛЕЙ ПРИ ОДНОМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ВОДЫ В ГРУНТАХ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ**

**Balamirzoev A. G., Zerbaliev M. A., Kurbanov K. O.**

## **MATHEMATICAL MODELING OF SALTS LEACHING WITH ONE-DIMENSIONAL FILTRATION OF WATER IN SOILS OF FINITE THICKNESS**

**Аннотация.** В статье поставлена и решена задача моделирования растворения и вымывания солей из однородной толщи засоленного грунта первого типа при одномерной установившейся и равномерной фильтрации воды. Поставленная задача сведена к решению дифференциального уравнения в частных производных с начальными и граничными условиями.

Получено уравнение конвективной диффузии, определяющее изменение концентрации солевого раствора при фильтрации воды в засоленных грунтах, при условии, что фильтрация воды в засоленном грунте является установившейся и равномерной, все соли, содержащиеся в порах грунта, полностью растворены, коэффициент конвективной диффузии не зависит от скорости фильтрации.

Определены изменения концентрации раствора во времени на нижней границе промываемой толщи грунта.

Получены формулы, пользуясь которыми можно определить коэффициенты конвективной диффузии и растворения солей.

**Ключевые слова:** фильтрация, засоленный грунт, многокомпонентная жидкость, пористая среда.

**Abstract.** In the article is considered and solved the problem of dissolution and leaching of salts from saline strata of homogeneous soil of the first type with one-dimensional steady-state and uniform water filtration. This problem is reduced to the solution of the differential equation in partial derivatives, with initial and boundary conditions.

Derived is the resulting equation of convective diffusion that determines the change in the concentration of the salt solution during filtration of water in saline soils, provided that water filtration in saline soil is steady and uniform, all the salts contained in the pores of the soil are completely dissolved, the coefficient of convective diffusion does not depend on speed of filtration.

Determined are the change in concentration in time at the lower boundary of the washing out ground thickness.

*Derived are the formulae using of which allows to determine convective diffusion and dissolution of salts factors.*

**Key words:** *filtration, saline soil, a multicomponent fluid, porous medium.*

**Введение.** В целях проведения всестороннего экспертного анализа состояния инженерно-геологических и гидрогеологических критериев строительных площадок, а также осуществления конструктивных решений при возведении объекта следует прогнозировать возможные деформации строения либо сооружения по причине выщелачивания солей из грунтов.

На базе общей теоретической концепции физико-химической гидродинамики, включающей в себя теоретическую концепцию фильтрации многокомпонентных жидкостей в пористой среде и смесей, содержащих в диссоциированном виде ионы засоленных грунтов можно смоделировать такой прогноз [1, 2].

**Постановка задачи.** К созданию единой системы уравнений, комплексно описывающих фильтрацию, диффузию и массообмен привело изучение физико-химических процессов, сопутствующих фильтрации многокомпонентных жидкостей.

Такой математический подход стал возможным при замене реальной грунтовой среды физической моделью в виде пористой среды с ограниченным и упрощенным представлением действительных сложных взаимодействий между растворами и скелетом грунта.

Характером засоления грунтов, степенью дисперсности водорастворимых частиц и критериями их расположения условно сравнительно скелета почвы определяется удельно-относительная площадь поверхности растворимых солей, омываемая фильтрационным потоком.

Следующими причинами определяется площадь раскрытой для воды поверхности солей, на которой происходит растворение: степенью дисперсности частиц солей; чем мельче частицы, тем больше площадь их удельно-относительной поверхности; характером контакта (соприкосновения) растворимых частиц со скелетом почвы; чем менее площадь поверхности контакта, тем более площадь поверхности, омываемой водой при фильтрации [4].

**Методы исследования.** Рассмотрим задачу с препятствием о растворении и вымывании солей из однородной толщи засоленной почвы при одномерной установившейся и равномерной фильтрации жидкой среды. Эту задачу можно свести к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{v}{n} \frac{\partial C}{\partial y} + \bar{\gamma}(C_n - C) \quad (1)$$

при начальных и граничных условиях [1, 2, 3]:

$$\left. \begin{aligned} C(y, t)|_{t=0} &= C(y, 0) = C_n, \quad 0 \leq y \leq l; \\ \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \frac{v}{nD} [C(0, t) - C_0], \quad t > 0; \\ \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=l} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $v$  – скорость фильтрации, м/с;  $n$  – пористость грунта;  $\bar{\gamma}$  – коэффициент растворения солей, с<sup>-1</sup>;  $C_n$  – концентрация предельной насыщенности жидкости солями данного состава, г/л;  $C$  – концентрация грунтового раствора, г/л;  $D$  – коэффициент конвективной диффузии, см<sup>2</sup>/сут;  $t$  – время, с.

После обозначения уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{nD}{vl} \frac{\partial^2 C}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{n\bar{\gamma}l}{v} (C_n - C), \quad (3)$$

или

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 C}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\partial C}{\partial y} + N_i (C_n - C), \quad (4)$$

где  $Pe = \frac{vl}{nD}$  и  $N_i = \frac{n\bar{\gamma}l}{v}$ .

С помощью подстановки

$$C(\bar{y}, \bar{t}) = C_n - (C_n - C_0) \left\{ u(\bar{y}) + v(\bar{y}, \bar{t}) \cdot \exp \left[ - \left( \frac{1}{4} Pe + N_i \right) \bar{t} \right] \right\} \exp \left( \frac{Pe}{2} \bar{y} \right) \quad (5)$$

уравнение (4) приводится к двум уравнениям:

$$\frac{d^2 u}{d\bar{y}^2} = a^2 u \quad (6)$$

при  $\frac{du}{d\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = \frac{Pe}{2} [u(0) - 2]; \quad \frac{du}{d\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=1} = -\frac{Pe}{2} u(1);$

где  $a^2 = \frac{Pe^2}{4} + N_i Pe;$

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{y}^2} \quad (7)$$

при  $\frac{\partial v}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = \frac{Pe}{2} v(0, \bar{t}); \quad \frac{\partial v}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=1} = \frac{Pe}{2} v(1, \bar{t}).$

Найдем решение задачи (6). Очевидно, решением уравнения

$$\frac{d^2 u}{d\bar{y}^2} - a^2 u = 0$$

является функция

$$u(\bar{y}) = Ae^{a\bar{y}} + Be^{-a\bar{y}}. \quad (8)$$

По условию (6) найдем:

$$A(a - \text{Pe}/2) - B(a + \text{Pe}/2) = -\text{Pe};$$

$$A(a + \text{Pe}/2)e^a - B(a - \text{Pe}/2)e^{-a} = 0,$$

$$\text{откуда получим: } A = \frac{\text{Pe}(a - 0,5\text{Pe})}{e^{2a}(a + 0,5\text{Pe})^2 - (a - 0,5\text{Pe})^2};$$

$$B = \frac{\text{Pe}(a + 0,5\text{Pe})e^{2a}}{e^{2a}(a + 0,5\text{Pe})^2 - (a - 0,5\text{Pe})^2}.$$

Подставляя значения  $A$  и  $B$  в уравнение (8), после необходимых преобразований получим решение задачи (6) в виде:

$$u(\bar{y}) = \frac{\text{Pe}[a \text{ch} a(1 - \bar{y}) + 0,5\text{Pe} \text{sh} a(1 - \bar{y})]}{(a^2 + 0,25\text{Pe}^2) \text{sh} a + a\text{Pe} \text{ch} a}. \quad (9)$$

Что же касается решения задачи (7), то оно известно из литературы [3]:

$$v(\bar{y}, \bar{t}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-1/(\text{Pe} \alpha_n^2 \bar{t})} \frac{\alpha_n \cos \alpha_n \bar{y} + 0,5\text{Pe} \sin \alpha_n \bar{y}}{\alpha_n^2 + 0,25\text{Pe}^2 + \text{Pe}} \cdot J, \quad (10)$$

где  $J = \int_0^l v(\bar{y}, 0)(\alpha_n \cos \alpha_n \bar{y} + 0,5\text{Pe} \sin \alpha_n \bar{y}) d\bar{y}$ ,  $\alpha_n (n=1,2,3)$  некоторые отличные от нуля корни уравнения

$$\text{tg} \alpha_n = \frac{\alpha_n \text{Pe}}{\alpha_n^2 - 0,25\text{Pe}^2}. \quad (11)$$

Последнее уравнение имеет бесчисленное множество вещественных корней, в чем нетрудно убедиться, построив графики кривых (рис. 1):

$$y = \text{ctg} \alpha_n; \quad y = \frac{\alpha_n}{\text{Pe}} - \frac{0,25\text{Pe}}{\alpha_n}.$$

Из рис.1 видно, что в каждом интервале  $(0, \pi)$ ,  $(\pi, 2\pi)$ , лежит положительный корень уравнения (11), а отрицательные корни по абсолютной величине равны положительным.

Следовательно, каждый член ряда (10) является частным решением уравнения (7).

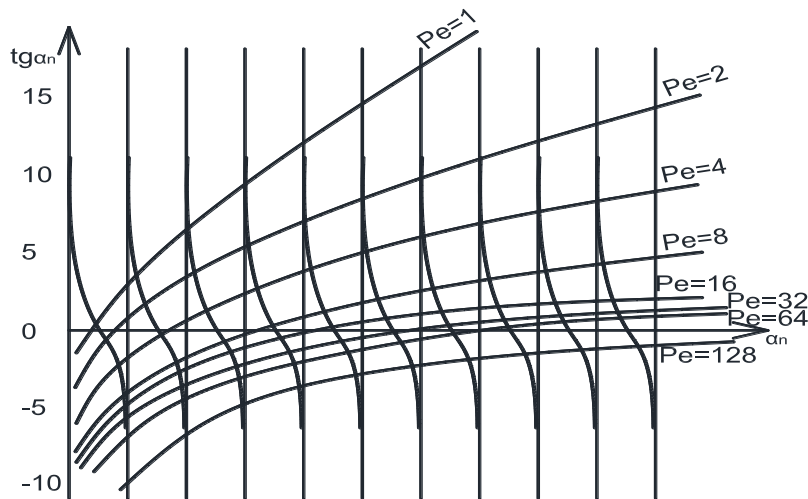


Рис. 1. Графическое решение уравнения (11)

Учитывая, что  $v(\bar{y}, 0) = -u(\bar{y})$ , из формулы (10) находим:

$$v(\bar{y}, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-1/(Pe \alpha_n^2 t)} \frac{\alpha_n \cos \alpha_n \bar{y} + 0,5Pe \sin \alpha_n \bar{y}}{\alpha_n^2 + 0,25Pe^2 + Pe} \times$$

$$\times \int_0^1 \frac{Pe[a \operatorname{ch} a(1-\bar{y}) + 0,5Pe \operatorname{sh} a(1-\bar{y})]}{(a^2 + 0,25Pe^2) \operatorname{sh} a + aPe \operatorname{ch} a} (\alpha_n \cos \alpha_n \bar{y} + 0,5Pe \sin \alpha_n \bar{y}) dy \quad (12)$$

Легко можно показать, что:

$$\int_0^1 \operatorname{ch} a(1-y) \cos \alpha_n y dy = \frac{\alpha_n \sin \alpha_n + a \operatorname{sh} a}{a^2 + \alpha_n^2};$$

$$\int_0^1 \operatorname{ch} a(1-y) \sin \alpha_n y dy = \frac{\alpha_n (\operatorname{ch} a - \cos \alpha_n)}{a^2 + \alpha_n^2};$$

$$\int_0^1 \operatorname{sh} a(1-y) \sin \alpha_n y dy = \frac{\alpha_n (\operatorname{ch} a - \cos \alpha_n)}{a^2 + \alpha_n^2};$$

$$\int_0^1 \operatorname{sh} a(1-y) \sin \alpha_n y dy = \frac{\alpha_n \operatorname{sh} a - a \sin \alpha_n}{a^2 + \alpha_n^2}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (12), после соответствующих преобразований получим:

$$v(\bar{y}, \bar{t}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-1/(Pe \alpha_n^2 \bar{t})} \frac{Pe \alpha_n (\alpha_n \cos \alpha_n \bar{y} + 0,5Pe \sin \alpha_n \bar{y})}{(a^2 + \alpha_n^2)(\alpha_n^2 + 0,25Pe^2 + Pe)}. \quad (13)$$

Учитывая равенства (9) и (13), из уравнения (5) находим

$$C(\bar{y}, \bar{t}) = C_n - (C_n - C_0) \left\{ \frac{Pe[a \operatorname{ch} a(1 - \bar{y}) + 0,5Pe \operatorname{sh} a(1 - \bar{y})]}{(a^2 + 0,25Pe^2) \operatorname{sh} a + aPe \operatorname{ch} a} - \right. \\ \left. - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Pe \alpha_n (\alpha_n \cos \alpha_n \bar{y} + 0,5Pe \sin \alpha_n \bar{y})}{(a^2 + \alpha_n^2)(\alpha_n^2 + 0,25Pe^2 + Pe)} \exp\left(-\frac{a^2 + \alpha_n^2}{Pe} \bar{t}\right) \right\} \exp\left(\frac{Pe}{2} \bar{y}\right), \quad (14)$$

где  $0 \leq \bar{y} \leq 1$ ,  $\bar{t} \leq 0$ ,  $\alpha_n (n=1,2,3)$  — корни уравнения (11).

**Обсуждение результатов.** Функция, определяемая равенством (14), удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2) и является требуемым решением.

Если обозначим  $\bar{C}(\bar{y}, \bar{t}) = [C_n - C(\bar{y}, \bar{t})]/(C_n - C_0)$ , то из уравнения (14) получим:

$$\bar{C}(\bar{y}, \bar{t}) = \left\{ \frac{Pe[a \operatorname{ch} a(1 - \bar{y}) + 0,5Pe \operatorname{sh} a(1 - \bar{y})]}{(a^2 + 0,25Pe^2) \operatorname{sh} a + aPe \operatorname{ch} a} - \right. \\ \left. - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Pe \alpha_n (\alpha_n \cos \alpha_n \bar{y} + 0,5Pe \sin \alpha_n \bar{y})}{(a^2 + \alpha_n^2)(\alpha_n^2 + 0,25Pe^2 + Pe)} \exp\left(-\frac{a^2 + \alpha_n^2}{Pe} \bar{t}\right) \right\} \exp\left(\frac{Pe}{2} \bar{y}\right), \quad (15)$$

Для определения изменения концентрации раствора во времени на нижней границе промываемой толщи грунта (уравнения выходных кривых) следует подставить  $y=1$ . Тогда  $\bar{y}=1$  и формула (15) получит вид

$$C(1, \bar{t}) = \frac{aPe \exp(0,5Pe)}{(a^2 + 0,25Pe^2) \operatorname{sh} a + aPe \operatorname{ch} a} - \\ - 2 \exp(0,5Pe) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Pe \alpha_n (\alpha_n \cos \alpha_n + 0,5Pe \sin \alpha_n)}{(a^2 + \alpha_n^2)(\alpha_n^2 + 0,25Pe^2 + Pe)} \exp\left(-\frac{a^2 + \alpha_n^2}{Pe} \bar{t}\right). \quad (16)$$

Из уравнения (11) определяем  $\cos \alpha_n = (\alpha_n - 0,25Pe^2)/(\alpha_n + 0,52Pe^2)$  и  $\sin \alpha_n = Pe \alpha_n / (\alpha_n^2 + 0,25Pe^2)$  и, с учетом этих значений из формулы (16) находим:

$$\bar{C}(1, \bar{t}) = \frac{aPe \exp(0,5Pe)}{(a^2 + 0,25Pe^2) \operatorname{sh} a + aPe \operatorname{ch} a} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Pe \alpha_n^2 \exp(0,5Pe)}{(a^2 + \alpha_n^2)(\alpha_n^2 + 0,25Pe^2 + Pe)} \exp\left(-\frac{a^2 + \alpha_n^2}{Pe} \bar{t}\right). \quad (17)$$

При  $\bar{\gamma} = 0$   $a = 0,5Pe$ , тогда

$$\bar{C}(1, \bar{t}) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Pe \alpha_n^2 \exp(0,5Pe)}{(\alpha_n^2 + 0,25Pe^2)(\alpha_n^2 + 0,25Pe^2 + Pe)} \cdot \theta, \\ \text{где } \theta = \exp\left(-\frac{\alpha_n^2 + 0,25Pe^2}{Pe} \bar{t}\right)$$

или

$$\bar{C}(1, \bar{t}) = \frac{C(1, \bar{t}) - C_0}{C_n - C_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Pe \alpha_n^2 \exp(0,5Pe)}{(\alpha_n^2 + 0,25Pe^2)(\alpha_n^2 + 0,25Pe^2 + Pe)} \cdot \theta. \quad (18)$$

Пользуясь формулами (17) и (18), можно определить коэффициенты конвективной диффузии и растворения солей.

**Вывод:** Определены изменения концентрации раствора во времени на нижней границе промываемой толщи грунта и получены формулы, воспользовавшись которыми можно квалифицировать коэффициенты конвективной диффузии и растворения солей при одномерной фильтрации воды в грунтах конечной толщины.

#### Библиографический список:

1. Баламирзоев, А.Г. Прогнозирование деформаций оснований гидротехнических сооружений на засоленных грунтах/А.Г.Баламирзоев.- Ростов-на-Дону.: Изд-во СКНЦ ВШ, 2001.- 201 с.
2. Баламирзоев А.Г. Развитие теории и методов прогнозирования суффозионных деформации при фильтрации в рещиноватых основаниях гидротехнических сооружений// дис. докт. техн. наук (05.23.07): защищена 25.05.06: утв.13.10.06/ Баламирзоев Абдул Гаджибалаевич.-Махачкала, 2006.-409 с.
3. Мамедов К. М., Исмаилов Ф. М. Об одном методе решения уравнений конвективной диффузии для случая фильтрации в пористой среде ограниченной мощности -Учен. зап. вузов МВиССО АзербССР Сер. X, 1973, с. 41- 47.
4. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород/ под ред. Н. Н. Веригина.-М. Недра, 1977.- 271 с.

### References:

1. Balamirzoev A.G. Prediction of deformation bases waterworks on saline soils. A.G.Balamirzoev.- Rostov-na-Donu.: Izd-vo SKNC VSH, 2001.- 201p.
2. Balamirzoev A.G. Development of the theory and methods of suffusion deformations prediction when filtering reschinovatyh grounds waterworks. dissertation doctor of Technical Sciences (05.23.07): 25.05.06: utv.13.10.06 Balamirzoev Abdul Gadzhibalaevich.- Makhachkala, 2006.-409p.
3. Mamedov K. M., Ismailov F. M. A method for solving the convective diffusion equations for the case of filtration in porous media of limited capacity. Scientists universities notes MViSSO AzerbSSR Ser. X, 1973, pp. 41- 47.
4. The hydrodynamic and physico-chemical properties of rocks. Edited by N. N. Verigina. – M. Nedra, 1977- 271p.

**УДК 539,41: 629.7.023**

***Булгаков А.И., Мананов Р.М., Муселемов Х.М., Устарханов О.М.***

### **РАСЧЕТ ТРЕХСЛОЙНЫХ БАЛОК ПО МЕТОДУ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ПОМОЩЬЮ ПК ЛИРА**

***Bulgakov A. I., Manapov R. M., Muselemov Kh.M., Ustarkhanov O.M.***

### **CALCULATION OF THREE-LAYER BEAMS BY THE FINITE ELEMENT-METHOD WITH THE HELP OF LIRA PC**

**Аннотация.** В настоящее время широкой популярностью у инженеров и научных работников пользуются программные комплексы, в основе которых заложен метод конечных элементов (МКЭ). Основной концепцией МКЭ является непосредственная дискретизация рассчитываемой системы, которая расчленяется расчетной сеткой на конечные элементы. В статье рассмотрены вопросы сходимости метода конечных элементов МКЭ для пластинчатых элементов.

На основании сделанных предположений выполнен численный эксперимент расчета напряженно-деформированного состояния трехслойной балки и произведено сравнение результатов с теоретическими данными, полученными по результатам расчета трехслойных балок (ТБ) проведенными по методу изложенном в справочнике Кобелева В.Н.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, сходимость, трехслойные балки, узловые переменные, линейная теория упругости, программные комплексы.