СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
BUILDING AND ARCHITECTURE

УДК 624.04
DOI: 10.21822/2073-6185-2022-49-4-182-193 Оригинальная статья / Original Paper

Определение несущей способности внецентренно сжатых трубобетонных колонн на основе деформационной теории пластичности бетона

К.Н. Хашхожев[1], Л.И. Лесняк[1], Р.М. Курачев[2], А.С. Чепурненко[1,3]
[1]Донской государственный технический университет,
[1]344000, г. Ростов-на-Дону, площадь Гагарина 1, Россия,
[2]Дагестанский государственный технический университет,
[2]367026, г. Махачкала, пр. И. Шамиля, 70, Россия
[3]Казанский (Приволжский) федеральный университет,
[3]420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, Россия

Резюме. Цель. В статье предлагается метод конечно-элементного анализа трубобетонных колонн в физически нелинейной постановке путем сведения трехмерной задачи к двумерной на основе гипотезы плоских сечений. **Метод.** В качестве соотношений, устанавливающих связь между напряжениями и деформациями, используются уравнения теории пластичности бетона Г.А. Гениева. Методика апробирована путем сравнения решения с расчетом в трехмерной постановке в программном комплексе ЛИРА-САПР, а также с экспериментальными данными А.И. Сагадатова и расчетом по действующим отечественным нормам проектирования сталежелезобетонных конструкций. **Результат.** Установлено, что эффективной областью работы колонн круглого поперечного сечения являются малые эксцентриситеты продольной силы. **Вывод.** Предложенный подход может быть применен к анализу напряженно-деформированного состояния и несущей способности трубобетонных колонн произвольного сечения. Ограничений по составу бетона нет, а материалом оболочки может быть не только сталь, но и стеклопластик.

Ключевые слова: трубобетонные колонны, метод конечных элементов, дилатация, теория пластичности, физическая нелинейность

Для цитирования: К.Н. Хашхожев, Л.И. Лесняк, Р.М. Курачев, А.С. Чепурненко. Определение несущей способности внецентренно сжатых трубобетонных колонн на основе деформационной теории пластичности бетона. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2022;49(4):182-193. DOI:10.21822/2073-6185-2022-49-4-182-193

Determination of the bearing capacity of encentrally compressed concrete filled steel tubular columns on the basis of the deformation theory of concrete plasticity

K.N. Khashkhozhev[1], L.I. Lesnyak[1], R.M. Kurachev[2], A.S. Chepurnenko[1,3]
[1]Don State Technical University,
[1]1 Gagarin Square, Rostov-on-Don 1344000, Russia,
[2]Daghestan State Technical University,
[2]70 I. Shamilya Ave., Makhachkala 367026, Russia
[3]Kazan (Volga Region) Federal University,
[3]18 Kremlevskaya Str., Kazan 420008, Russia

Abstract. Objective. The article proposes a method for finite element analysis of pipe-concrete columns in a physically nonlinear setting by reducing a three-dimensional problem to a two-dimensional one based on the hypothesis of plane sections. **Method.**The equations of the theory of plasticity of concrete by G.A. Geniev are used. The technique was tested by comparing the solution with a calculation in a three-dimensional setting in the LIRA-SAPR software package, as well as with the experimental data of A.I. Sagadatov and calculation according to the current Russian design codes for steel-pipe concrete structures. **Result.** It has been established that the effective area of operation of columns with a circular cross section is small eccentricities of the longitudinal force. **Conclusion.** The proposed approach can be applied to the analysis of the stress-strain state and the bearing capacity of pipe-concrete columns of arbitrary section. There are no restrictions on the composition of concrete, and the shell material can be not only steel, but also fiberglass.

Keywords: concrete filled steel tubular columns, finite element method, dilatation, theory of plasticity, physical nonlinearity

For citation: K.N. Khashkhozhev, L.I. Lesnyak, R.M. Kurachev, A.S. Chepurnenko. Determination of the bearing capacity of encentrally compressed concrete filled steel tubular columns on the basis of the deformation theory of concrete plasticity. Herald of the Daghestan State Technical University. Technical Science. 2022; 49 (4):182-193. DOI: 10.21822 /2073-6185-2022-49-4-182-193

Введение. Трубобетонные колонны (ТБК) в настоящее время все шире применяются в строительстве, особенно при возведении высотных зданий [1-4] благодаря ряду важных преимуществ, среди которых высокая несущая способность и скорость возведения, меньшая материалоемкость, потребительские и производственные затраты. Одним из существенных недостатков ТБК является отсутствие общепринятых методик расчета, учитывающих влияние бокового обжатия бетона.Не существует универсального метода, пригодного для произвольной формы поперечного сечения, которое, помимо круглого, может быть прямоугольным [5-8], шестигранным [9-11], восьмиугольным [12], кольцевым [13-14]. Кроме стали, в качестве материала оболочки может использоваться стеклопластик [15]. Большинство публикаций по методам расчета трубобетона, в том числе и перечисленные выше, основаны на эмпирическом подходе, не в полной мере отражающем специфику изменения напряженно-деформированного состояния колонн при различных нагрузках. Это накладывает ограничения на форму поперечного сечения, материал оболочки и состав бетона (тяжелый и легкий бетон, высокопрочный бетон и обычный бетон и т. д.).

Постановка задачи. Наиболее близкие к реальной работе конструкций результаты дает конечно-элементное моделирование в объемной постановке с учетом физической нелинейности материала [16]. Однако такой подход требует больших вычислительных затрат. Нами предлагается подход, позволяющий уменьшить размерность задачи определения напряженно-деформированного состояния с трехмерной на двумерную без заметной потери точности результатов.

Методы исследования. Расчетная схема конструкции представлена на рис. 1. Трехмерная задача сводится к двумерной, путем введения гипотезы плоских сечений.

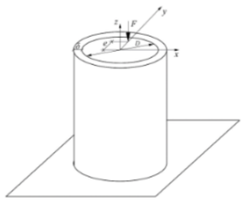


Рис.1. Расчетная схема
Fig.1. Calculation scheme

Для бетона будут использоваться плоские треугольные конечные элементы (КЭ) (рис. 2), а для стальной оболочки - одномерные двухузловые конечные элементы (рис. 3).

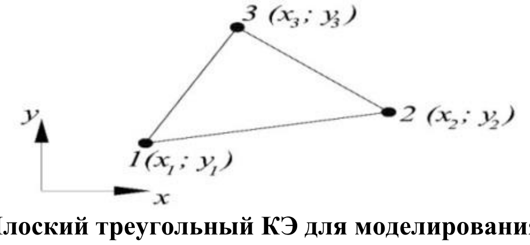


Рис. 2. Плоский треугольный КЭ для моделирования бетона
Fig. 2. Flat triangular FE for concrete modeling

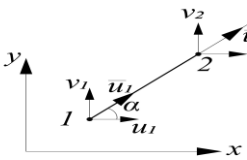


Рис.3. Одномерный двухузловой КЭ для моделирования стальной обоймы
Fig.3. One-dimensional two-node FE for modeling a steel cage

Плоские треугольные конечные элементы имеют в каждом узле 2 степени свободы - перемещения u_i и v_i. Аппроксимация перемещений выполняется линейными функциями:

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3; \quad v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3, \tag{1}$$

где $N_i = \frac{1}{2A}\left(a_i + b_i x + c_i y\right)$, A – площадь поперечного сечения элемента, $a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$, $b_1 = y_2 - y_3$, $c_1 = x_3 - x_2$.

Коэффициенты a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 определяются путем циклической замены индексов $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Вектор деформаций в плоскости xy записывается в виде:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = [B]\{U\}, \tag{2}$$

где $[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$, $\{U\} = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3\}^T$ – вектор узловых перемещений. Деформация ε_z представляет собой сумму осевой деформации и деформации, вызванной изменением кривизны:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z^0 + y\chi. \tag{3}$$

При выводе разрешающих уравнений будем учитывать наличие вынужденных деформаций $\varepsilon_x^*, \varepsilon_y^*, \varepsilon_z^*, \gamma_{xy}^*$, к которым могут быть отнесены деформации ползучести, усадки, температурные деформации, эффекты дилатации и др. Связь между напряжениями и деформациями бетона с учетом вынужденных деформаций, записывается в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right) + \varepsilon_x^*; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right) + \varepsilon_y^*; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_y + \sigma_x\right)\right) + \varepsilon_z^*; \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} + \gamma_{xy}^*. \end{aligned} \tag{4}$$

Исключим из (4) напряжение σ_z:

$$\sigma_z = E\left(\varepsilon_z - \varepsilon_z^*\right) + \nu\left(\sigma_y + \sigma_x\right) = E\left(\varepsilon_z^0 + y\chi - \varepsilon_z^*\right) + \nu\left(\sigma_y + \sigma_x\right). \tag{5}$$

Подставляя (5) в первые два уравнения (4), получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_1}\left(\sigma_x - \nu_1\sigma_y\right) + \varepsilon_x^* - \nu\left(\varepsilon_z^0 + y\chi - \varepsilon_z^*\right); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_1}\left(\sigma_y - \nu_1\sigma_x\right) + \varepsilon_y^* - \nu\left(\varepsilon_z^0 + y\chi - \varepsilon_z^*\right), \end{aligned} \tag{6}$$

где $E_1 = E/(1-\nu^2), \nu_1 = \nu/\left(1-\nu\right)$.

Последнее уравнение в (4) можно записать в виде:

$$\gamma_{xy} = \frac{2\left(1+\nu_1\right)}{E_1}\tau_{xy} + \gamma_{xy}^{*}. \tag{7}$$

Выразим в (6)-(7) напряжения через деформации:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2}\left(\varepsilon_x + \nu_1\varepsilon_y - \left(\varepsilon_x^* + \nu_1\varepsilon_y^*\right) + \nu\left(1+\nu_1\right)\left(\varepsilon_z^0 + y\chi - \varepsilon_z^*\right)\right) = \\
&= \frac{E_1}{1-\nu_1^2}\left(\varepsilon_x + \nu_1\varepsilon_y - \left(\varepsilon_x^* + \nu_1\varepsilon_y^*\right) + \nu_1\left(\varepsilon_z^0 + y\chi - \varepsilon_z^*\right)\right); \\
\sigma_y &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2}\left(\varepsilon_y + \nu_1\varepsilon_x - \left(\varepsilon_y^* + \nu_1\varepsilon_x^*\right) + \nu_1\left(\varepsilon_z^0 + y\chi - \varepsilon_z^*\right)\right); \\
\tau_{xy} &= \frac{E_1}{2\left(1+\nu_1\right)}\left(\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^*\right).
\end{aligned} \tag{8}$$

Запишем равенства (8) в матричном виде: $\{\sigma\} = [D]\left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^*\}\right) + \{\sigma_1\}$, (9)

где $[D] = \frac{E_1}{1-\nu_1^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu_1 & 0 \\ \nu_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_1}{2} \end{bmatrix}, \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^* \\ \varepsilon_y^* \\ \gamma_{xy}^* \end{Bmatrix}, \ \{\sigma_1\} = \frac{E_1\nu_1}{1-\nu_1^2}\left(\varepsilon_z^0 + y\chi - \varepsilon_z^*\right)\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$

Представим равенство (5) в виде:

$$\sigma_z = E\left(\varepsilon_z^0 + y\chi - \varepsilon_z^*\right) + \nu\left(\sigma_y + \sigma_x\right) = E\left(\varepsilon_z^0 + y\chi - \varepsilon_z^*\right) + \nu\{\sigma\}^T\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{10}$$

При выводе разрешающих уравнений будем использовать принцип минимума полной энергии. Потенциальная энергия деформации трубобетонного элемента представляет собой сумму потенциальной энергии бетона Π_b и стали Π_s. Величина Π_b определяется по формуле:

$$\Pi_b = \frac{1}{2}\int_A \left(\sigma_x\varepsilon_x^{el} + \sigma_y\varepsilon_y^{el} + \tau_{xy}\gamma_{xy}^{el} + \sigma_z\varepsilon_z^{el}\right)dA. \tag{11}$$

Нижние индексы «*el*» в формуле (11) соответствуют упругим деформациям, которые представляют собой разницу между полной и вынужденной деформациями. Представим выражение (11) в виде:

$$\Pi_b = \frac{1}{2}\int_A \sigma_z\left(\varepsilon_z^0 + y\chi - \varepsilon_z^*\right)dA + \frac{1}{2}\int_A \{\sigma\}^T\left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^*\}\right)dA. \tag{12}$$

Рассмотрим далее отдельно первый интеграл в (12):

$$\frac{1}{2}\int_A \sigma_z\left(\varepsilon_z^0 + y\chi - \varepsilon_z^*\right)dA = \frac{1}{2}\int_A E\left(\varepsilon_z^0 + y\chi - \varepsilon_z^*\right)^2 dA + \frac{\nu}{2}\int_A \{\sigma\}^T\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\left(\varepsilon_z^0 + y\chi - \varepsilon_z^*\right)dA. \tag{13}$$

Первый член в (13) обращается в нуль после минимизации по вектору узловых перемещений $\{U\}$. Представим второе слагаемое в виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{\nu}{2}\int_A \{\sigma\}^T\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\left(\varepsilon_z^0 + y\chi - \varepsilon_z^*\right)dA = \frac{\nu}{2}\int_A (\{\sigma_1\}^T + \left(\{\varepsilon\}^T - \{\varepsilon^*\}^T\right)[D])\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\left(\varepsilon_z^0 + y\chi - \varepsilon_z^*\right)dA = \\
&= \frac{\nu}{2}\left(\int_A \left(\{\sigma_1\}^T - \{\varepsilon^*\}^T[D]\right)\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\left(\varepsilon_z^0 + y\chi - \varepsilon_z^*\right)dA + \int_A \{U\}^T[B]^T[D]\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\left(\varepsilon_z^0 + y\chi - \varepsilon_z^*\right)dA\right).
\end{aligned} \tag{14}$$

Первый интеграл в (14) также обращается в нуль после минимизации. Во втором интеграле будем считать, что деформация ε_z^* внутри конечного элемента постоянна. С учетом этого она представлена в виде:

$$\frac{\nu}{2}\int_A \{U\}^T[B]^T[D]\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix}\left(\varepsilon_z^0+y\chi-\varepsilon_z^*\right)dA=\frac{\nu}{2}\{U\}^T[B]^T[D]\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix}\left(\left(\varepsilon_z^0-\varepsilon_z^*\right)A+\chi\int_A ydA\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\{U\}^T[B]^T A\nu[D]\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix}\left(\varepsilon_z^0+y_c\chi-\varepsilon_z^*\right)=\frac{1}{2}\{U\}^T[B]^T A\frac{E_1\nu_1}{1-\nu_1^2}\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix}\left(\varepsilon_z^0+y_c\chi-\varepsilon_z^*\right)= \quad (15)$$
$$=\frac{1}{2}\{U\}^T[B]^T A\{\sigma_1\}.$$

В формуле (15) $y_c = (y_1 + y_2 + y_3) / 3$ – координата центра тяжести конечного элемента. Рассмотрим далее второй член в (12):

$$\frac{1}{2}\int_A \{\sigma\}^T\left\{\varepsilon^{el}\right\}dA=\frac{1}{2}\int_A\left[\left(\{\varepsilon\}^T-\left\{\varepsilon^*\right\}^T\right)[D]+\{\sigma_1\}^T\right]\left(\{\varepsilon\}-\left\{\varepsilon^*\right\}\right)dA= \quad (16)$$
$$=\frac{1}{2}\int_A\{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon\}-2\{\varepsilon\}^T[D]\left\{\varepsilon^*\right\}+\left\{\varepsilon^*\right\}^T[D]\left\{\varepsilon^*\right\}+\{\sigma_1\}^T\{\varepsilon\}-\{\sigma_1\}^T\left\{\varepsilon^*\right\}dA.$$

Слагаемые $\left\{\varepsilon^*\right\}^T[D]\left\{\varepsilon^*\right\}$ и $\{\sigma_1\}^T\left\{\varepsilon^*\right\}$ после минимизации по вектору узловых перемещений исчезают. Рассмотрим отдельно каждое из оставшихся слагаемых:

$$\frac{1}{2}\int_A\{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon\}dA=\frac{1}{2}\{U\}^T[B]^T[D][B]A\{U\}=\frac{1}{2}\{U\}^T[K_b]\{U\}, \quad (17)$$

где $[K_b]=[B]^T[D][B]A$ – матрица жёсткости бетона.

$$\frac{1}{2}\int_A\{\sigma_1\}^T\{\varepsilon\}dA=\frac{1}{2}\int_A\{\varepsilon\}^T\{\sigma_1\}dA=\frac{1}{2}\{U\}^T[B]^T\{\sigma_1\}A; \quad (18)$$
$$\int_A\{\varepsilon\}^T[D]\left\{\varepsilon^*\right\}dA=\{U\}^T[B]^T[D]\left\{\varepsilon^*\right\}A=\{U\}^T\left\{F^*\right\}.$$

Для КЭ стальной оболочки перемещения аппроксимируются следующим образом:

$$u(s)=u_1+\frac{u_2-u_1}{l}s. \quad (19)$$

Окружные деформации оболочки определяются как:

$$\varepsilon_{s\theta}=\frac{du}{ds}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{l} & \frac{1}{l}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=[B_s]\{U_s\}. \quad (20)$$

Напряжения в стали рассчитываются по формулам:

$$\sigma_{s\theta}=\frac{E_s}{1-\nu_s^2}\left(\varepsilon_{s\theta}+\nu_s\varepsilon_{sz}\right)=\frac{E_s}{1-\nu_s^2}\left(\varepsilon_{s\theta}+\nu_s\left(\varepsilon_z^0+y_s\chi\right)\right);$$
$$\sigma_{sz}=\frac{E_s}{1-\nu_s^2}\left(\varepsilon_{sz}+\nu_s\varepsilon_{s\theta}\right)=\frac{E_s}{1-\nu_s^2}\left(\varepsilon_z^0+y_s\chi+\nu_s\varepsilon_{s\theta}\right). \quad (21)$$

Координата y_s внутри КЭ непостоянна. Для удобства вычислим его посередине элемента. Потенциальная энергия деформации КЭ записывается в виде:

$$\Pi_s=\frac{1}{2}\left(\delta\int_0^l\sigma_{s\theta}\varepsilon_{s\theta}ds+\delta\int_0^l\sigma_{sz}\varepsilon_{sz}ds\right). \quad (22)$$

Первый интеграл в (22) определяется как

$$\begin{aligned}\delta\int_0^l \sigma_{s\theta}\varepsilon_{s\theta}ds &= \frac{E_s\delta}{1-\nu_s^2}\int_0^l\left(\{U_s\}^T[B_s]^T+\nu_s\left(\varepsilon_z^0+y_s\chi\right)\right)[B_s]\{U_s\}ds = \\ &= \frac{E_s\delta l}{1-\nu_s^2}\{U_s\}^T[B_s]^T[B_s]\{U_s\}+\frac{E_s\nu_s\delta l}{1-\nu_s^2}\left(\varepsilon_z^0+y_s\chi\right)[B_s]\{U_s\} = \\ &= \{U_s\}^T[K_s]\{U_s\}+\{U_s\}^T[B_s]^T\frac{E_s\nu_s\delta l}{1-\nu_s^2}\left(\varepsilon_z^0+y_s\chi\right),\end{aligned} \quad (23)$$

где $[K_s]=\frac{E_s\delta l}{1-\nu_s^2}[B_s]^T[B_s]=\frac{E_s\delta}{l\left(1-\nu_s^2\right)}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ - матрица жесткости стальной обоймы.

Второй интеграл в (22) вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta\int_0^l \sigma_{sz}\varepsilon_{sz}ds &= \frac{E_s\delta}{1-\nu_s^2}\int_0^l\left(\varepsilon_z^0+y_s\chi+\nu_s\{U_s\}^T[B_s]^T\right)\left(\varepsilon_z^0+y_s\chi\right)ds = \\ &= \frac{E_s\delta}{1-\nu_s^2}\left(\int_0^l\left(\varepsilon_z^0+y_s\chi\right)^2ds+\nu_s\int_0^l(\varepsilon_0+y_s\chi)[B_s]\{U_s\}ds\right).\end{aligned} \quad (24)$$

Первый интеграл в (24) обращается в нуль после минимизации по вектору узловых перемещений. Второй интеграл записывается как:

$$\frac{E_s\delta\nu_s}{1-\nu_s^2}\int_0^l(\varepsilon_0+y_s\chi)[B_s]\{U_s\}ds=\{U_s\}^T[B_s]^T\frac{E_s\delta\nu_s l}{1-\nu_s^2}\left(\varepsilon_z^0+y_s\chi\right). \quad (25)$$

Внешние силы при перемещениях колонны в плоскости *xy* работу не совершают, поэтому функционал полной энергии для рассматриваемой задачи равен потенциальной энергии деформации. Минимизируя потенциальную энергию деформации по вектору узловых перемещений, получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$[K]\{U\}+\{F_b\}+\{F_s\}-\left\{F^*\right\}=0, \quad (26)$$

где

$$[K]=[K_b]+[K_s],\{F_b\}=[B]^T\{\sigma_1\}A=[B]^T A\frac{E_1\nu_1}{1-\nu_1^2}\left(\varepsilon_z^0+y_c\chi-\varepsilon_z^*\right)\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix},$$

$$\{F_s\}=[B_s]^T\frac{E_s\delta\nu_s l}{1-\nu_s^2}\left(\varepsilon_z^0+y_s\chi\right).$$

Вектор $\{F_s\}$ в (27), а также матрица $[K_s]$ в (23) записаны в локальной системе координат элемента. При составлении системы уравнений МКЭ выполняется преобразование координат по формулам:

$$\{\bar{U}\}=[L]\{U\};[K]=[L]^T\left[\bar{K}\right][L];\{F\}=[L]^T\{\bar{F}\};[L]=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}. \quad (27)$$

где $\{\bar{U}\},\{\bar{F}\},\left[\bar{K}\right]$ – вектор узловых перемещений, вектор нагрузки и матрица жесткости в локальной системе координат, $\{U\},\{F\},[K]$ – то же самое для глобальной системы координат. Система (26), помимо вектора узловых перемещений, содержит еще 2 неизвестных: величины ε_z^0 и χ. В качестве двух дополнительных уравнений выступают условия равновесия:

$$\begin{aligned}F &= -\sum\sigma_{z,i}A_i-\delta\sum\sigma_{sz,i}l_i;\\ M &= Fe=-\sum\sigma_{z,i}y_{c,i}A_i-\delta\sum\sigma_{sz,i}y_{s,i}l_i.\end{aligned} \quad (28)$$

Напряжение σ_z в *i*-м треугольном КЭ бетона определяется как:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= E\left(\varepsilon_z^0+y_c\chi-\varepsilon_z^*\right)+\nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=E\left(\varepsilon_z^0+y_c\chi-\varepsilon_z^*\right)+\nu\{1\ \ 1\ \ 0\}\{\sigma\}= \\ &= E\left(\varepsilon_z^0+y_c\chi-\varepsilon_z^*\right)+\nu\{1\ \ 1\ \ 0\}\left([D]\left([B]\{U\}-\left\{\varepsilon^*\right\}\right)+\{\sigma_1\}\right)= \\ &= \left(E+\frac{2E_1\nu_1}{1-\nu_1^2}\right)\left(\varepsilon_z^0+y_c\chi-\varepsilon_z^*\right)+\nu\{1\ \ 1\ \ 0\}[D]\left([B]\{U\}-\left\{\varepsilon^*\right\}\right).\end{aligned} \quad (29)$$

Напряжение σ_{sz} в *i*-м одномерном КЭ стальной оболочки определяется как:

$$\sigma_{sz} = \frac{E_s}{1-\nu_s^2}\left(\varepsilon_z^0 + y_s\chi + \nu_s\varepsilon_{s\theta}\right) = \frac{E_s}{1-\nu_s^2}\left(\varepsilon_z^0 + y_s\chi + \nu_s\left[B_s\right]\left[L\right]\left\{U\right\}\right). \quad (30)$$

Таким образом, для общего числа узлов n задача сводится к $2n + 2$ уравнениям с $2n + 2$ неизвестными. В качестве уравнений, устанавливающих связь между напряжениями и деформациями в бетоне, используются зависимости деформационной теории пластичности бетона Г.А. Гениева [17]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E(\Gamma)}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right) + \varepsilon_\partial; \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E(\Gamma)}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right) + \varepsilon_\partial; \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E(\Gamma)}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right) + \varepsilon_\partial; \\
\gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E(\Gamma)}\tau_{xy},
\end{aligned} \quad (31)$$

где $\varepsilon_\partial = -g_0\Gamma^2/3$ – дилатационные деформации, g_0 – модуль дилатации, $\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)^2 + \left(\varepsilon_2-\varepsilon_3\right)^2 + \left(\varepsilon_1-\varepsilon_3\right)^2}$ – интенсивность деформаций сдвига.

Дилатационные деформации можно рассматривать как частный случай вынужденных деформаций $\varepsilon_x^*, \varepsilon_y^*, \varepsilon_z^*$. Модуль дилатации g_0 в теории Гениева определяется как:

$$g_0 = -\frac{\theta_c}{\Gamma_c^2}, \quad (32)$$

где θ_c – предельная объемная деформация бетона при чистом сдвиге, Γ_c – предельная интенсивность сдвиговых деформаций при чистом сдвиге, рассчитываемая по формуле:

$$\Gamma_c = \frac{2T_c}{G_0}. \quad (33)$$

В формуле (33) T_c – предельная интенсивность касательных напряжений при чистом сдвиге. Нами она определялась как $T_c = \sqrt{R_b R_{bt}/3}$ на основе критерия прочности П.П. Баландина [18], где R_b и R_{bt} – прочность бетона на сжатие и растяжение соответственно, G_0 – начальный модуль сдвига бетона, E_0 – начальный модуль упругости бетона.

Секущий модуль $E(\Gamma)$ нами определялся по формуле:

$$E(\Gamma) = E_0\left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_s}\right), \quad (34)$$

где Γ_s – предельная интенсивность сдвиговых деформаций, зависящая от характера напряженного состояния.

При использовании критерия П.П. Баландина:

$$\Gamma_s = \Gamma_c k(\lambda), \quad k(\lambda) = \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + 1}. \quad (35)$$

Параметр λ в (35) рассчитывается по формуле:

$$\lambda = \frac{f\sigma}{T}, \quad (36)$$

где $f = \frac{3T_c\left(R_b - R_{bt}\right)}{R_b R_{bt}}$, $\sigma = \left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)/3$.

Расчет производится ступенчатым методом, нагрузка увеличивается малыми порциями ΔF. Приращение дилатационной деформации определяется как:

$$\Delta\varepsilon_{\partial}=\varepsilon_{\partial}\left(\Gamma+\Delta\Gamma\right)-\varepsilon_{\partial}\left(\Gamma\right)=-\frac{g_0}{3}\left(\Gamma^2+2\Gamma\Delta\Gamma+\Delta\Gamma^2\right)-\frac{g_0}{3}\Gamma^2=-\frac{g_0}{3}\left(2\Gamma\Delta\Gamma+\Delta\Gamma^2\right). \quad (37)$$

Величиной $\Delta\Gamma^2$ по сравнению с первым слагаемым в скобках можно пренебречь, так как это величина более высокого порядка малости, и тогда формула (37) принимает вид:

$$\Delta\varepsilon_{\partial}=-\frac{2g_0\Gamma\Delta\Gamma}{3}. \quad (38)$$

Материал оболочки предполагается идеально упругопластическим; используется условие пластичности Губера-Мизеса-Генки:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sigma_{sz}^2-\sigma_{sz}\sigma_{s\theta}+\sigma_{s\theta}^2}=R_y, \quad (39)$$

где R_y — предел текучести стали. Для расчетов авторами разработана программа в среде MATLAB.

Обсуждение результатов. Для контроля правильности полученных уравнений и разработанной методики первым шагом была решена тестовая задача в упругой постановке с последующим сравнением в программном комплексе ЛИРА-САПР. Решение проводилось при следующих исходных данных: D = 0,3 м, δ = 2 мм, E_b = 1,4·10^4 МПа, E_s = 2 · 10^5 МПа, F = 600 кН, e = D/2, ν_s = 0,3, ν_b = 0,2. В силу симметрии рассматривалась половина поперечного сечения. В программном комплексе ЛИРА-САПР задача решалась в трехмерной постановке, бетон моделировался объемными призматическими КЭ, стальная оболочка моделировалась плоскими оболочечными КЭ. Для исключения локальных эффектов в месте приложения силы на верхнем конце колонны была установлена пластина с большой жесткостью. Расчетная схема представлена на рис. 4.

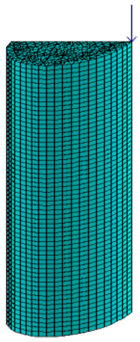
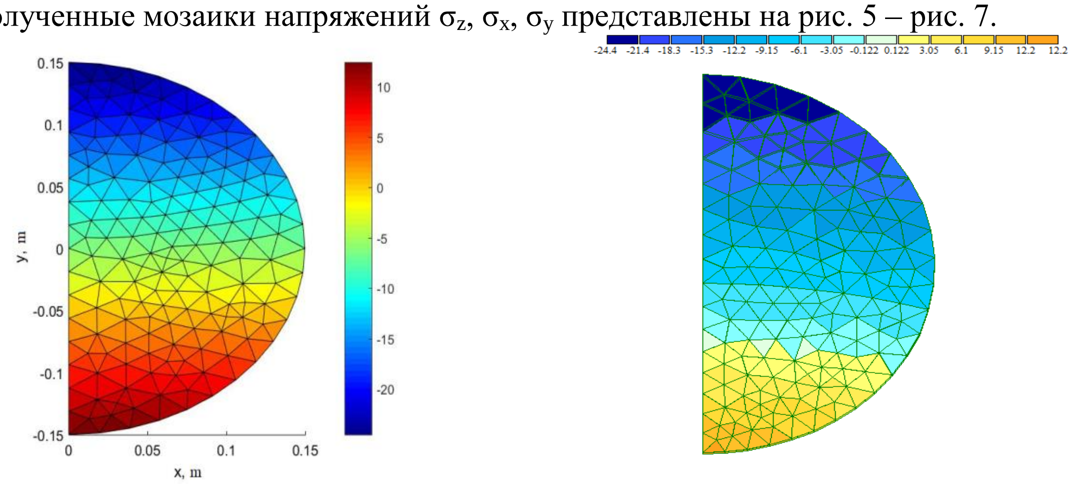


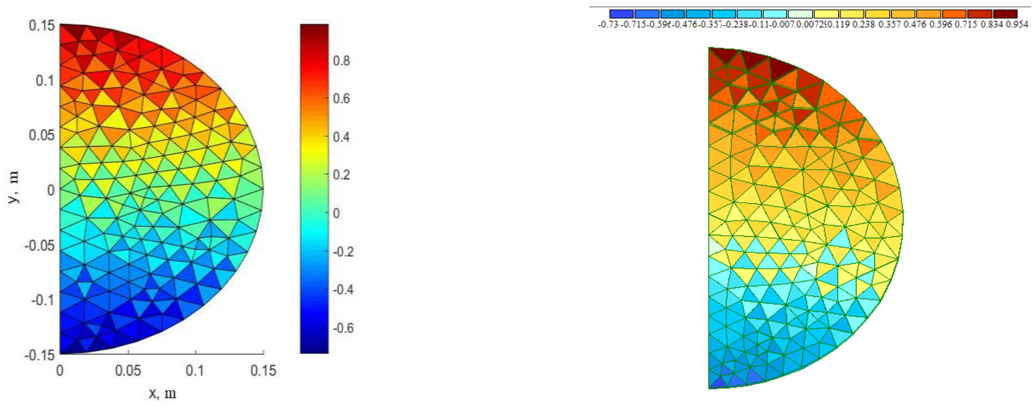
Рис.4. Расчетная схема в ПК ЛИРА-САПР
Fig.4. Calculation scheme in SP LIRA-SAPR

Полученные мозаики напряжений σ_z, σ_x, σ_y представлены на рис. 5 – рис. 7.



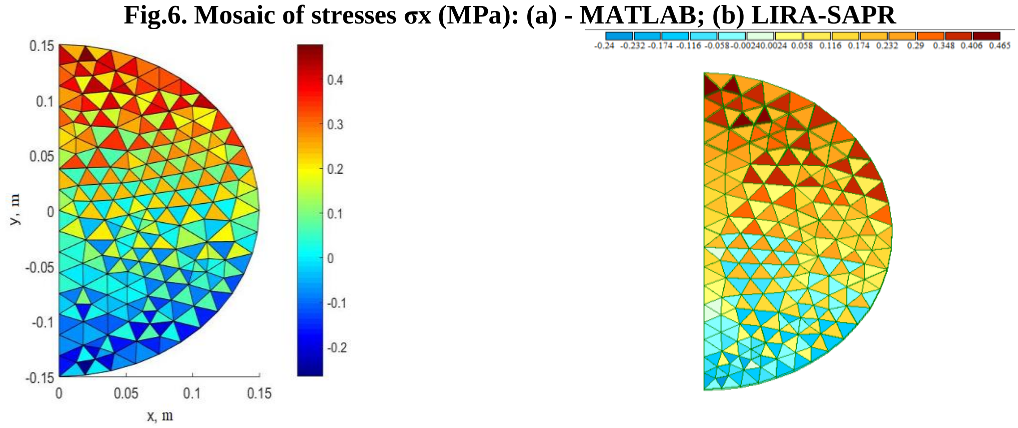
(а) (б)

Рис.5. Мозаика напряжений σ_z (МПа): (а) – MATLAB; (б) ЛИРА-САПР
Fig.5. Mosaic of stresses σz (MPa): (a) - MATLAB; (b) LIRA-SAPR



(а) (б)

Рис.6. Мозаика напряжений σ_x (МПа): (а) – MATLAB; (б) ЛИРА-САПР
Fig.6. Mosaic of stresses σx (MPa): (a) - MATLAB; (b) LIRA-SAPR



(а) (б)

Рис.7. Мозаика напряжений σ_y (МПа): (а) – MATLAB; (б) ЛИРА-САПР
Fig. 7. Stress mosaic σy (MPa): (a) MATLAB; (b) LIRA-SAPR

Сравнение значений максимальных напряжений в ЛИРА-САПР и Matlab приведено в табл. 1.

Таблица 1. Сравнение максимальных напряжений в ЛИРА-САПР и MATLAB
Table 1. Comparison of maximum stresses in LIRA-SAPR and MATLAB

	σ_z, МПа	σ_x, МПа	σ_y, МПа
MATLAB	24,5	0,985	0,478
ЛИРА-САПР LIRA-SAPR	24,4	0,954	0,465

Разброс напряжений σ_y в соседних элементах наблюдается как при решении в трехмерной постановке в ЛИРА-САПР, так и при решении в двумерной постановке в MATLAB. Это связано с тем, что напряжения σ_y значительно ниже напряжений σ_z. Кроме того, причиной могут быть низкие аппроксимационные свойства треугольных симплекс элементов. При более мелкой сетке КЭ этот разброс уменьшается. Расчет на грубой сетке дает завышенные значения напряжений, что уходит в запас прочности.

Также разработанная методика и программное обеспечение были апробированы на экспериментальных данных, представленных в работах А.И. Сагадатов [19-20]. Здесь мы приведем сравнение с экспериментальными данными для двух серий колонн с внешним диаметром бетонного ядра 159 и 219 мм и толщиной стенки 6 и 8 мм соответственно. При расчете по авторской методике применялись два варианта моделирования трубобетонной колонны. В первом варианте бетон и обойма имели общие узлы, а во втором между узлами бетона и обоймы устанавливались контактные элементы, имеющие бесконечную жесткость при положительном контактном давлении и нулевую жесткость при отсутствии контакта. При этом заметной разницы в результатах при расчете по двум вариантам выявлено не было.

В табл. 2 представлены опытные величины предельных нагрузок $N_{u,эксп}$, полученные нами теоретические значения $N_{\text{u,теор}}$, величины предельных нагрузок $N_{\text{u,bs}}$, вычисленные без учета бокового обжатия ядра, а также значения предельных нагрузок $N_{u,норм}$,, вычисленные в соответствии с СП 266.1325800.2016.

Таблица 2. Значения предельных нагрузок
Table 2. Values of ultimate loads

Номер образца	D, мм	δ, мм	R_b, МПа	e/D	$N_{u,эксп}$, кН	$N_{\text{u,теор}}$, кН	$N_{u,норм}$, кН	$N_{\text{u,bs}}$, кН	$N_{\text{u,теор}}/N_{\text{u,bs}}$
1	159	6	22,0	0,065	1412	1505	2052	1200	1,25
2	159	6	22,5	0,13	1213	1280	1338	1060	1,21
3	159	6	22,3	0,26	958	975	1062	920	1,06
4	219	8	32,5	0,065	2911	3129	4416	2780	1,13
5	219	8	30,5	0,13	2508	2600	2712	2365	1,1
6	219	8	32,1	0,26	1945	1990	2184	1870	1,06

Из табл. 2 видно, что совпадение результатов достаточно хорошее; наибольшее отклонение теоретических значений предельных нагрузок от экспериментальных составляет 7,5 %. Также из данной таблицы видно, что с увеличением эксцентриситета продольной силы эффект от работы бетона в трехосном напряженном состоянии снижается. Обращает на себя внимание, что при малых эксцентриситетах нормы проектирования дают сильно завышенные значения предельных нагрузок (до 40%). Объяснить это можно тем, что в нормы проектирования заложены прямоугольные эпюры напряжений для бетона и стали в предельном состоянии.

Вывод. Разработана методика расчета внецентренно сжатых коротких колонн с учетом бокового обжатия в физически нелинейной постановке с использованием метода конечных элементов. На основе гипотезы плоских сечений трехмерная задача сведена к двумерной. Для контроля правильности результатов в трехмерной постановке решена упругая задача в программном комплексе ЛИРА с последующим сравнением результатов. Также методика апробирована на экспериментальных данных для внецентренно сжатых колонн, представленных в работе А.И. Сагадатова. Подтверждено, что эффективной областью применения трубобетонных колонн являются случаи малых эксцентриситетов. Установлено, что при малых эксцентриситетах действующие нормы проектирования сталежелезобетонных конструкций дают сильно завышенные значения предельных нагрузок.

Библиографический список:

1. Резван, А.В. Рационализация технологических, конструктивных и архитектурных решений трубобетонных конструкций на примере колонн высотных зданий // Инженерный вестник Дона / А.В. Резван, М.А. Колотиенко. – 2020. – №5. – URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N5y2020/6475
2. Аадсан, А. Технико-экономический расчет металлических, железобетонных и трубобетонных колонн с использованием вычислительных комплексов / А. Аадсан, Д.О. Тенемаза, А.Ю. Кубасов // Инженерный вестник Дона. – 2018. – №2. – URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2018/5015
3. Дуванова, И. А. Трубобетонные колонны в строительстве высотных зданий и сооружений / И. А. Дуванова, И. Д. Сальманов //Строительство уникальных зданий и сооружений. – 2014. – №. 6. – С. 89-103.
4. Кришан, А. Л. Трубобетонные колонны для многоэтажных зданий / А.Л. Кришан //Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2009. – №. 4. – С. 75-80.
5. Кришан, А. Л А. С. Мельничук. Трубобетонные колонны квадратного сечения.. Жилищное строительство. – 2012. – №. 5. – С. 19-20.
6. Кришан, А. Л. Кришан А. Л., Мельничук А. С. .Прочность трубобетонных колонн квадратного сечения при осевом сжатии .Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. ГИ Носова. – 2012. – №. 3. – С. 51-54.
7. Кришан, А. Л. Прочность усовершенствованных трубобетонных элементов квадратного поперечного сечения / А. Л. Кришан, В. И. Римшин, М. А. Астафьева //Строительные материалы. – 2018. – №. 6. – С. 24-28.
8. Кришан, А. Л. Несущая способность трубобетонных колонн квадратного поперечного сечения / А. Л. Кришан, А. С. Мельничук //Инновации в отраслях народного хозяйства, как фактор решения социально-экономических проблем современности. – 2011. – С. 57-59.
9. Ma, D. Y. Behaviour of hexagonal concrete-encased CFST columns subjected to cyclic bending / D.Y. Ma, L.H. Han, X. Ji, W.B. Yang // Journal of Constructional Steel Research. – 2018. – Т. 144. – С. 283-294.
10. Xu, W. Performance of hexagonal CFST members under axial compression and bending / W. Xu, L.H. Han, W. Li //Journal of constructional steel research. – 2016. – Т. 123. – С. 162-175.
11. Hassanein, M. F. Behaviour and design of hexagonal concrete-filled steel tubular short columns under axial compression / M.

F. Hassanein, V. I. Patel, M. Bock //Engineering Structures. – 2017. – Т. 153. – С. 732-748.
12. Fang, H. Structural performance of concrete-filled cold-formed high-strength steel octagonal tubular stub columns / H. Fang, T. M. Chan, B. Young //Engineering Structures. – 2021. – Т. 239. – С. 112360.
13. Хашхожев, К. Н. Расчет центрально сжатых трубобетонных колонн кольцевого сечения с учетом физической нелинейности / К. Н. Хашхожев, А. А. Аваков // Строительство и архитектура. – 2021. – Т. 9. – №3. – URL: https://riorpub.com/ru/nauka/article/45575/view
14. Krishan, A.,. Astafeva M. Strength and Deformability of the Concrete Core of Precompressed Concrete Filled Steel Tube Columns of Annular Cross-Section . MATEC Web of Conferences. EDP Sciences, 2019. – Т. 278. – С. 03002.
15. Krishan, A. L. The strength of short compressed concrete elements in a fiberglass shell / A. L. Krishan, M. Y. Narkevich, A. I. Sagadatov, V.I. Rimshin //Magazine of civil engineering. – 2020. – №. 2 (94). – С. 3-10.
16. Ouyang, Y. Finite element analysis of square concrete-filled steel tube (CFST) columns under axial compressive load / Y. Ouyang, A.K.H. Kwan //Engineering Structures. – 2018. – Т. 156. – С. 443-459.
17. Гениев, Г. А. Теория пластичности бетона и железобетона / Г. А. Гениев, В. Н. Киссюк, Г. А. Тюпин. – М.:Стройиздат, 1974. – 316 с.
18. Andreev, V. Calculation of Equal Strength Thick-Walled Concrete Cylinder with Free Ends / V. Andreev, I. Potekhin //IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – IOP Publishing, 2019. – Т. 661. – №. 1. – С. 012023.
19. Narkevich, M. Y.. Strength and deformation property enhancement of compressed steel tube-concrete elements using super concrete and thin-shell structure / M. Y. Narkevich, A. I. Sagadatov //IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – IOP Publishing, 2019. – Т. 687. – №. 3. – С. 033031.
20. Сагадатов, А. И. Напряженно-деформированное состояние сжатых трубобетонных элементов с внутренним стальным сердечником: дисс. ... канд. техн. наук : 05.23.01 /А.И. Сагадатов. - Магнитогорск, 2006. - 180 с.

References:

1. Rezvan A. V., Kolotienko M. A. Rationalization of technological, constructive and architectural solutions of pipe-concrete structures on the example of columns of high-rise buildings. *Inzhenernyy vestnik Dona*. 2020;(65). URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N5y2020/6475
2. Aadsan A., Tenemaza D. O., Kubasov A. Yu. Technical and economic calculation of metal, reinforced concrete and pipe concrete columns using computer systems. *Inzhenernyy vestnik Dona*. 2018;2(49). URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2018/5015
3. Duvanova I. A., Salmanov I. D. Pipe concrete columns in the construction of high-rise buildings and structures. *Construction of unique buildings and structures.* 2014; 6: 89-103.
4. Krishan A.L. Pipe-concrete columns for multi-storey buildings. *Construction mechanics of engineering structures and structures.* 2009; 4: 75-80.
5. Krishan A.L., Melnichuk A.S. Pipe-concrete columns of square section Housing construction. 2012; 5:19-20.
6. Krishan A.L., Melnichuk A.S. Strength of square pipe-concrete columns under axial compression. *Bulletin of the Magnitogorsk State Technical University.* 2012; 3: 51-54.
7. Krishan A. L., Rimshin V. I., Astafyeva M. A. Strength of improved square-section pipe-concrete elements. *Building materials.* 2018; 6.: 24-28.
8. Krishan A. L., Melnichuk A. S. Bearing capacity of pipe-concrete columns of square cross-section. Innovations in the branches of the national economy as a factor in solving social and economic problems of our time. 2011; 57-59.
9. Ma D. Y. et al. Behaviour of hexagonal concrete-encased CFST columns subjected to cyclic bending. *Journal of Constructional Steel Research.* 2018; 144: 283-294.
10. Xu W., Han L. H., Li W. Performance of hexagonal CFST members under axial compression and bending. *Journal of constructional steel research.* 2016; 123: 162-175.
11. Hassanein M. F., Patel V. I., Bock M. Behaviour and design of hexagonal concrete-filled steel tubular short columns under axial compression. *Engineering Structures*. 2017; 153: 732-748.
12. Fang H., Chan T. M., Young B. Structural performance of concrete-filled cold-formed high-strength steel octagonal tubular stub columns. *Engineering Structures*. 2021; 239: 112360.
13. Khashkhozhev K. N., Avakov A. A. Calculation of centrally compressed pipe-concrete columns of an annular section taking nto account physical nonlinearity. *Construction and architecture.* 2021;9.(3). URL: https://riorpub.com/ru/nauka/article/45575/view
14. Krishan A., Astafeva M. Strength and Deformability of the Concrete Core of Precompressed Concrete Filled Steel Tube Columns of Annular Cross-Section. MATEC Web of Conferences. EDP Sciences. 2019; 278: 03002.
15. Krishan A. L., Narkevich M.Y., Sagadatov A.I., Rimshin, V.I. The strength of short compressed concrete elements in a fiberglass shell. *Journal of civil engineering*. 2020; 2 (94): 3-10.
16. Ouyang Y., Kwan A. K. H. Finite element analysis of square concrete-filled steel tube (CFST) columns under axial compressive load. *Engineering Structures.* 2018; 156: 443-459.
17. Geniev G.A., Kissyuk G.A., Tyupin V.N. Teoriya plastichnosti betona i zhelezobetona [The theory of plasticity of concrete and reinforced concrete]. Moscow: *Stroyizdat,* 1974: 316.
18. Andreev V., Potekhin I. Calculation of Equal Strength Thick-Walled Concrete Cylinder with Free Ends. IOP Conference Series: *Materials Science and Engineering. IOP Publishing,* 2019; 661(1): 012023.
19. Narkevich M. Y., Sagadatov A. I. Strength and deformation property enhancement of compressed steel tube-concrete elements using super concrete and thin-shell structure. IOP Conference Series: *Materials Science and Engineering. IOP Publishing*, 2019; 687(3): 033031.
20. Sagadatov A. I. Stress-strain state of compressed concrete filled steel tubular elements with an internal steel core: PhD thesis; Magnitogorsk, 2006.

Сведения об авторах:

Хашхожев Казбек Нарзанович, аспирант кафедры «Сопротивление материалов»; kazbek_hash@mail.ru

Лесняк Любовь Ивановна, начальник Управления научно-исследовательской работы обучающихся; li.lesnyak@sci.donstu.ru

Курачев Раджаб Магомедович, аспирант; kurachev@mail.ru

Чепурненко Антон Сергеевич, доктор технических наук, профессор кафедры «Сопротивление материалов» , главный научный сотрудник Институт дизайна и пространственных искусств; anton_chepurnenk@mail.ru

Information about authors:

Kazbek N. Khashkhozhev, Postgraduate Student, Department "Strength of Materials"»; kazbek_hash@mail.ru

Lyubov I. Lesnyak, Head of the Department of Research Work of Students; li.lesnyak@sci.donstu.ru

Rajab M. Kurachev, Postgraduate Student; kurachev@mail.ru

Anton S. Chepurnenko, Dr. Sci. (Eng.), Prof.; Department "Strength of Materials", Chief Researcher of the Institute of Design and Spatial Arts; anton_chepurnenk@mail.ru

Конфликт интересов/Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/Received 04.10.2022

Одобрена после рецензирования/ Reviced 27.10.2022.

Принята в печать/Accepted for publication 27.10.2022.