СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
BUILDING AND ARCHITECTURE

УДК 624. 016.5
DOI: 10.21822/2073-6185-2022-49-4-162-168 Оригинальная статья /Original Paper

Исследование зависимости максимальных нормальных напряжений в сечениях тонкостенных стержней от кривизны изогнутой оси при продольном изгибе

А.С. Личковаха[1], Б.А. Шемшура[1], С.А. Кузнецов[2]
[1]Ростовский государственный университет путей сообщения,
[1]344038, г. Ростов-на-Дону, пл. Ростовского стрелкового полка народного ополчения, 2, Россия,
[2]Южно-Российский государственный политехнический университет имени М.И. Платова,
[2]346428, г. Новочеркасск, ул. Просвещения, 132, Россия

Резюме. Цель. Целью исследования является определение зависимости нормального напряжения от радиуса кривизны гибкого стержня при различной толщине**. Метод.** Применен метод определения максимальных напряжений в продольно сжатом стержне большой гибкости с помощью эллиптических интегралов **Результат.** Выполнено моделирование тонкостенного продольно сжатого стержня в расчётном комплексе ANSIS. **Вывод.**Точная теория расчета гибких стержней позволяет определить значение осевой силы при продольном сжатии, при которой концы стержня сомкнутся. При решении задач практического использования такого типа стержней интерес представляет определение максимальных напряжений, причем в любой стадии деформации, что позволяет с большей точностью выбрать размерные параметры упругого элемента и его материал.

Ключевые слова: стержень большой гибкости, кривизна упругой линии, продольный изгиб, метод эллиптических параметров

Для цитирования: А.С. Личковаха, Б.А. Шемшура, С.А. Кузнецов. Исследование зависимости максимальных нормальных напряжений в сечениях тонкостенных стержней от кривизны изогнутой оси при продольном изгибе. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2022; 49(4):162-168. DOI:10.21822/2073-6185-2022-49-4-162-168.

Study of the dependence of the maximum normal stresses in the sections of thin-walled rods on the curvature of the bent axis in the longitudinal bending

A.S. Lichkovakha[1], B.A. Shemshura[1], S.A. Kuznetsov[2]
[1]Rostov State Transport University,
[1]2 Rostovskogo Strelkovogo Polka Narodnogo Opolcheniya Square, Rostov-on-Don 344038, Russia,
[2]M.I. Platova South Russian State Polytechnic University,
[2]132 Prosveshcheniya Str., Novocherkassk 346428, Russia

Abstract. Objective. The aim of the study is to determine the dependence of the normal stress on the radius of curvature of a flexible rod at different thicknesses. **Method.** A method was applied to determine the maximum stresses in a longitudinally compressed rod of high flexibility using elliptic integrals. **Result.** Modeling of a thin-walled longitudinally compressed rod was performed in the ANSIS calculation complex. **Conclusion.** The exact theory for calculating flexible rods allows you to determine the value of the axial force during longitudinal compression, at which the ends of the rod will close. When solving the problems of practical use of this type of rods, it is of interest to determine the maximum stresses, and at any stage of deformation, which makes it possible to choose the dimensional parameters of the elastic element and its material with greater accuracy.

Keywords: highly flexible rod, curvature of an elastic line, buckling, elliptical parameters method

For citation: A.S. Lichkovakha, B.A. Shemshura, S.A. Kuznetsov. Study of the dependence of the maximum normal stresses in the sections of thin-walled rods on the curvature of the bent axis in the longitudinal bending. Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. 2022; 49(4): 162-168. (In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2022-49-4-162-168.

Введение. Определение величины максимальных напряжений является одной из основных задач в области проектирования и эксплуатации механизмов и конструкций [1]. Численной характеристикой степени влияния внешних сил на деформируемый элемент большой гибкости в теории расчета, предложенной Е.П. Поповым [2] является величина изгибающего момента, которая и определяет значение напряжений в тонкостенных стержнях, при этом кривизна стержня, точнее, радиус его кривизны, входит в формулу определения момента:

$$M = \frac{EJ}{\rho} \tag{1}$$

Здесь E– модуль упругости материала, J – осевой момент инерции сечения, $H = EJ$ – изгибная жёсткость стержня, ρ – радиус кривизны изогнутой оси стержня – (величина, обратная кривизне $\chi = \frac{1}{\rho}$)

Постановка задачи. С целью установления влияния минимальной кривизны стержня на значение максимальных напряжений соответствующая зависимость может быть формализована с учетом геометрического представления эллиптических интегралов Лежандра, выполненного учеными Томского политехнического университета [3].

При исследовании на прочность стержней малой гибкости опорные реакции и внутренние силовые факторы определяются из условия, что первоначально стержни являются абсолютно твёрдыми, поэтому изгибающие моменты и нормальные напряжения, равные отношению максимального изгибающего момента к осевому моменту сопротивления не будут зависеть от изменения кривизны стержня. При определении изгибающих моментов в стержнях большой гибкости (тонкостенные стержни) кривизна упругой линии изменяется существенно. Теоретически точное значение кривизны определяется по формуле

$$\chi = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{[1+(\dfrac{dy}{dx})^2]^3}}, \tag{2}$$

но необходимо установить координаты точки с максимальной кривизной.

С другой стороны, точное значение кривизны упругой линии можно вычислить из равенства (1), если известны величина изгибающего момента, соответствующая радиусу кривизны и изгибная жёсткость стержня. Зависимость изгибающего момента от геометрических параметров гибкого стержня и осевой силы установлена Е.П. Поповым [2] и имеет вид

$$M = \frac{2k\cos\psi Fl}{\beta} - H\chi_o \tag{3}$$

Здесь k – эллиптический модуль, ψ – эллиптическая амплитуда в рассматриваемом сечении, F – сила, сжимающая стержень, H – изгибная жёсткость стержня, l – длина гибкого стержня, β – силовой коэффициент, χ_0 – начальная кривизна стержня.

Методы исследования. В качестве примера определим максимальные нормальные напряжения в тонкостенном стержне, продольно сжатого силой $\boldsymbol{F}$ (рис.1), когда начальная кривизна равна нулю. В точке сжатия (точка С рис.1 б) изгибающий момент будет максимальным, где эллиптическая амплитуда $\psi = \pi$.

На основе метода эллиптических интегралов [2] и их геометрического представления [3] определим зависимости параметров изогнутого стержня и силовых факторов, зависящих от конфигурации изогнутого стержня.

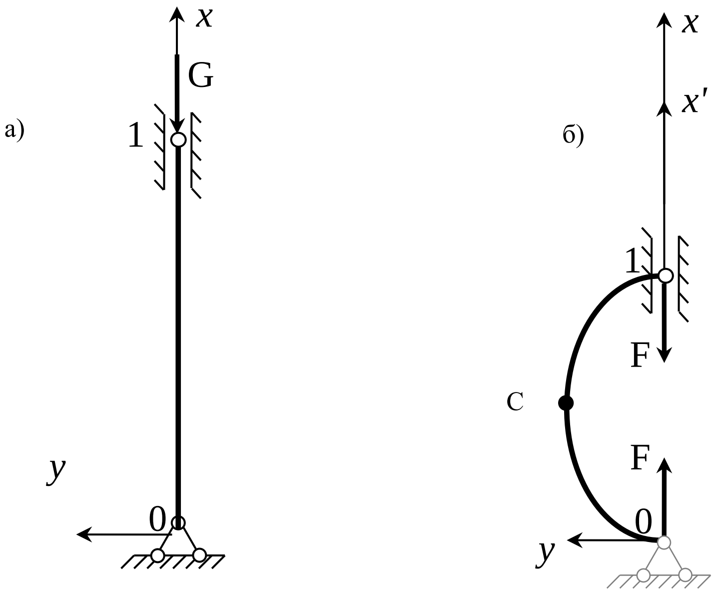

Рис. 1. Расчетная схема гибкого стержня с шарнирами на концах: а – исходный вид; б – деформированный осевой силой
Fig. 1. Calculation scheme of a flexible rod with hinges at the ends: a – original view; b - deformed by axial force

Модулярный угол α

$$\cos\alpha = 0,5(\frac{b}{l}+1) \cdot \tag{4}$$

Эллиптический модуль k

$$k = \sqrt{1-(\frac{b+l}{2l})^2} \cdot \tag{5}$$

Силовой коэффициент β

$$\beta = \frac{\pi}{2}[\frac{1+0,5(\frac{b}{l}+1)}{0,5(\frac{b}{l}+1)}] \cdot \tag{6}$$

Сила, сжимающая стержень

$$F = \frac{\pi^2 H[1+0,5(\frac{b}{l}+1)]^2}{l^2(\frac{b}{l}+1)^2} \cdot \tag{7}$$

Максимальный прогиб

$$f_{\max} = \frac{2\cdot l\sqrt{1-(\frac{b+l}{2l})^2}\cdot(\frac{b}{l}+1)}{\pi[1+0,5(\frac{b}{l}+1)} \cdot \tag{8}$$

Отличительной особенностью представленных зависимостей (4–8) является то, что все параметры уравнений, зависящие от конфигурации стержня, выражены через длину стержня ***l*** и хорду ***b***, соединяющую концы стержня. Используя эти выражения, получим формулу для вычисления максимальных изгибающих моментов в сечениях тонкостенных стержней

$$M_{\max} = \frac{2\pi H[1+0,5(\frac{b}{l}+1)]^2}{l(\frac{b}{l}+1)^2}\cdot\frac{\sqrt{1-(\frac{b+l}{2l})^2}}{[1+0,5(\frac{b}{l}+1)]} \tag{9}$$

Минимальный радиус кривизны $\rho_{\min} = \frac{EJ}{M_{\max}}$ (10)

Максимальные нормальные напряжения $\sigma_{\max} = \dfrac{Et}{2\rho}$ (11)

Кроме того, полученные данные могут быть использованы для проверочного расчета по формуле (2), так как абсцисса искомой точки равна собственно максимальному прогибу, а ордината равна половине хорды. Рассмотрим варианты определения радиуса кривизны и напряжения в гибких стержнях:в первом случае, если известна конфигурация изогнутой оси стержня (для схемы представленной на рис.1 задаётся длина хорды b); во втором случае, когда заданы силовые факторы (для схемы представленной на рис.1 задана сжимающая сила *F*).

Первый вариант. Определить максимальное нормальное напряжение и минимальный радиус кривизны упругой линии стержня, а также вычислить значение силы, которую следует приложить к прямолинейному тонкостенному стержню рис.1, чтобы концы его соприкоснулись (b = 0). Исходные данные задачи: длина стержня l = 0,4 *м,* ширина 5,15 *мм* и толщина 0,5 *мм* прямоугольного сечения (5,15х0,5 *мм*), момент сопротивления W = 0,215 мм^3, осевой момент инерции J_{min} = 0,053 мм^4, изгибная жёсткость стержня Н = 0,01073 Нм^2.

Так как при соприкосновении концов стержня длина хорды b = 0, то из формулы (7) сжимающая сила равна

$$F = \frac{3{,}14^2 \cdot 0{,}0107 \cdot 1{,}5^2}{0{,}4^2} = 1{,}484\,H\,.$$

Максимальный изгибающий момент по формуле (9)

$$M_{\max} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}0107 \cdot 1{,}5^2}{} \cdot \frac{\sqrt{1-(\frac{l}{2l})^2}}{0{,}4[1+0{,}5]} = 0{,}218\,Hм\,.$$

Минимальный радиус кривизны по формуле (10)

$$\rho_{\min} = \frac{H}{M} = 0{,}049\,м\,.$$

Максимальное напряжение по формуле (11)

$$\sigma_{\max} = \frac{Et}{2\rho} = \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0{,}049 \cdot 10^{6}} = 1020\,МПа$$

Для схемы на рис. 1 определены графические зависимости максимальных нормальных напряжений от радиуса кривизны гибких стержней, когда их концы соединены рис.2 (кривая 1 – t = 0,5 мм, кривая 2 – t = 2 мм, кривая 3 – t = 4 мм).

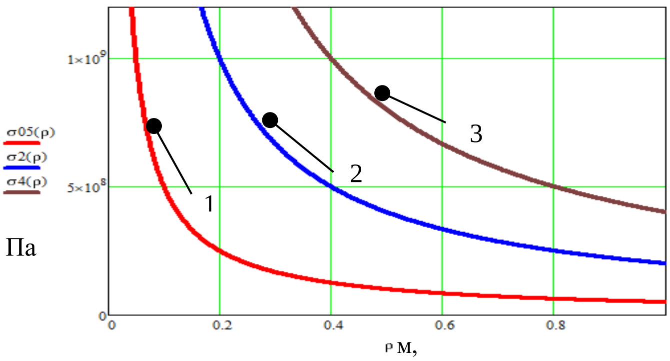

Рис. 2. Зависимости изменения нормального напряжения от радиуса кривизны гибкого стержня при различной толщине

Fig. 2. Dependences of the change in normal stress on the radius of curvature of a flexible rod at different thicknesses

Из рис. 2 видно, что при увеличении толщины стержня напряжения при одинаковых радиусах кривизны значительно увеличиваются. Эти результаты имеют значение при проектировании упругих элементов с нелинейной (регрессивно-прогрессивной) характеристикой [4-6], и их исследовании [7-9], причем при задании входных параметров практически удобно задавать именно размер хорды, соответствующий максимальной деформации гибкого стержня.

Второй вариант (в данном случае является проверочным). Для стержня на рис.1 с исходными данными предыдущей задачи вычислить длину хорды сжатого стержня под действием силы F=1,484 H и определить максимальный изгибающий момент.

Силовой коэффициент подобия согласно [2] $\beta = l\sqrt{\frac{F}{H}} = 0,4\sqrt{\frac{1.484}{0,0107}} = 4,71$

Для схемы на рис.1 эллиптические амплитуды в характерных точках равны $\psi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{T.C.} = \pi, \quad \psi_1 = \frac{3\pi}{2}$.

Силовой коэффициент подобия β также связан с эллиптическими параметрами зависимостью

$$\beta = F(\psi_1) - F(\psi_0). \tag{12}$$

Для заданной расчетной схемы (рис.1) $\beta = F(\frac{3\pi}{2}) - F(\frac{\pi}{2}) = 2F(k)$

Тогда полный интеграл первого рода $F(k) = \frac{\beta}{2} = \frac{4,71}{2} = 2,355$

Аналитическое значение полного эллиптического интеграла первого рода согласно исследованиям [3] определяется по формуле

$$F(k) = \frac{0,5\pi}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}} \tag{13}$$

Из уравнения (13) определяется модулярный угол α

$$\frac{\alpha}{2} = arctg\sqrt{1 - \frac{0,5\pi}{F(k)}} = 30^o \rightarrow \quad \alpha = 60^o$$

Модуль эллиптического интеграла $k = sin\alpha = sin60 = 0,866$

С учетом исследований [2,3] эллиптический интеграл второго рода определим по формуле $E(k) = F(k)\cdot\cos\alpha = 2,355\cdot\cos 60^o = 1,178$

Координату концевой точки стержня, равную длине хорды стержня b определим из равенства

$$\frac{x_1}{l} = \frac{2}{\beta}[E(\psi_1) - E(\psi_0)] - 1 = \frac{2}{\beta}[E(\frac{3\pi}{2}) - E(\frac{\pi}{2})] - 1 = \frac{4}{\beta}E(k) - 1 \tag{14}$$

Тогда, длина хорды $\frac{x_1}{l} = \frac{b}{l} = \frac{4}{4,71}\cdot 1,178 - 1 = 0$.

Максимальный изгибающий момент по формуле (3) равен

$$M = \frac{2\cdot 0,866\cdot 1,484\cdot 0,4}{4,71} = 0,218\,Нм$$

Полученные результаты свидетельствуют о высокой точности расчетных формул. Применяя формулы (10) и (11), можно получить такое же значение радиуса кривизны и максимального нормального напряжения, как и при неизвестной силе F в первой задаче. Если, к примеру, задано значение допускаемого напряжения [σ] = 300 МПа, то по представленным зависимостям возможно определить допускаемые значения для:

- радиуса кривизны из условия прочности согласно (10) $\frac{Et}{2\rho} \le [\sigma]$

$$\rho = \frac{Et}{2[\sigma]} = \frac{2\cdot 10^{11}\cdot 0,5\cdot 10^{-3}}{2\cdot 3\cdot 10^{-8}} = 0,167\,м \qquad [\rho] \ge 0,167\,м$$

- изгибающего момента из равенства (1)

$$M = \frac{H}{[\rho]} = \frac{0,01073}{0,167} = 0,0642\,Нм \quad [M] \le 0,0642\,Нм$$

- хорды из равенства (9)

$$[M] = \frac{2\cdot\pi\cdot H[1 + 0,5(\frac{b}{l} + 1)]^2}{l(\frac{b}{l} + 1)^2}\cdot\frac{\sqrt{1 - (\frac{b + l}{2l})^2}}{[1 + 0,5(\frac{b}{l} + 1)]}$$

$$0.0642=\frac{2\cdot 3,14\cdot 0,01073[1+0,5(\dfrac{b}{0,4}+1)]^2}{0,4(\dfrac{[b}{0,4}+1)^2}\cdot\frac{\sqrt{1-(\dfrac{b+0,4}{2\cdot 0,4})^2}}{[1+0,5(\dfrac{b}{0,4}+0,4)]}$$

$[b]\geq 0,26м$

- силы, сжимающей стержень из равенства (7)

$$F=\frac{\pi^2 H[1+0,5(\dfrac{[b]}{l}+1)]^2}{l^2(\dfrac{[b]}{l}+1)^2}=\frac{3,14^2\cdot 0,01073[1+0,5(\dfrac{0,26}{0,4}+1)]^2}{0,4^2(\dfrac{0,26}{0,4}+1)^2}$$

$[F]\leq 0,81H.$

Обсуждение результатов. С целью сопоставления результатов, полученных по предлагаемой методике, было выполнено моделирование тонкостенного продольно сжатого стержня в расчётном комплексе *ANSIS* [10], когда его начальная кривизна равна нулю. На рис.3 представлена расчетная модель и деформированный вид гибкого стержня (обозначена точка сжатия «С»), сжатого продольной силой.

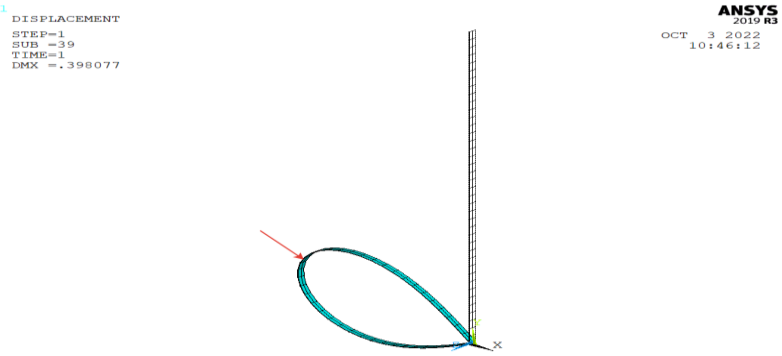

Рис.3 Расчетная модель стержня в исходном состоянии и деформированном виде
Fig.3. Calculation model of the rod in the initial state and deformed form

Результат определения максимальных нормальных напряжений представлен на рис. 4.

Рис.4. Распределение нормальных напряжений в гибком стержне
Fig.4. Distribution of normal stresses in a flexible rod

Полученные данные позволяют сделать вывод о достаточно высокой корреляции полученных результатов. Так, например значение максимального нормального напряжения, полученного с помощью предлагаемой методики (вариант первый, значение в *МПа*), имеет расхождение с программным (значение в *Па*) менее 3%, при этом значение силы (*Н*), достаточной для соприкосновения концов стержня (когда длина хорды будет равна нулю) имеет отклонение от расчетного значения также менее 3 %.

Вывод. Используемый в работе метод определения максимальных напряжений в продольно сжатом стержне большой гибкости с помощью эллиптических интегралов является перспективным при создании базы знаний для проектирования упругих элементов с нелинейной характеристикой и поиска новых технических решений; особенно удобным для практических расчетов представляется использование в числе входных параметров величины хорды, соединяющей концы стержня.

Библиографический список:

1. Пономарёв, С.Д. Расчёты на прочность в машиностроении /С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, В.И. Феодосьев. – М.: Машгиз, 1956. – Т.1. – 886с
2. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 296с.
3. Анфилофьев А. В. Геометрическое представление эллиптических интегралов / А. В. Анфилофьев, В. М. Замятин // Известия Томского политехнического университета [Известия ТПУ]. 2005. Т. 308, № 5. —С. 11-14.
4. Пат. № 2706770 Российская Федерация, МПК B 60G 11/10.Упругий механизм с регрессивно-прогрессивной характеристикой. С.А. Кузнецов, А.С. Личковаха, Б.А. Шемшура . Заявл. 09.01.2019; оп. 20.11.2019, Бюл. № 32.
5. Пат. № 2486065 Российская Федерация, МПК B 60G 11/04. Упругая подвеска с регрессивно-прогрессивной характеристикой / С.А. Кузнецов, В.Н. Семенов, Я.А. Лысенко, Ю.Ю. Олейничева. – Заявл. 15.02.2012; опубл. 27.06.2013, Бюл. № 18.
6. Пат.№ 2521879 Российская Федерация, МПК B 60G 3/16. Упругая подвеска с регрессивно-прогрессивной характеристикой / В.Н. Семенов, С.А. Кузнецов, А.А. Галушкин. Заявл. 13.12.2012; оп. 10.07.2014, Бюл. № 19.
7. Личковаха, А. С. Исследование деформированного состояния и перемещений гибкого стержня с начальной кривизной /А. С. Личковаха, Б. А. Шемшура, С. А. Кузнецов // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. – 2020. – Т. 47. – № 1. – С. 156-164. – DOI 10.21822/2073-6185-2020-47-1-156-164.
8. Личковаха, А.С. Исследование деформации стержня большой гибкости при осевом нагружении /А.С. Личковаха, Б.А. Шемшура, С.А. Кузнецов // Известия высших учебных заведений. Северо-кавказский регион. Технические науки. – 2016. – №3. – С. 71-76.
9. Личковаха А.С., Исследование напряжённо-деформированного состояния внецентренно сжатого стержня большой гибкости: / А.С. Кузнецов, Б.А.Шемшура, А.С. Личковаха. Электронный научный журнал Инженерный вестник Дона №1, 2018 ivdon.ru/ru/magazine/archive/nly2018/4773-0,9п.л.
10. Басов, К. А. ANSYS для конструкторов / К. А. Басов – М. : ДМК Пресс, 2009. – 248 с.

References:

1. S.D. Ponomarev, V.L. Biderman, V.I. Feodosiev. Calculations on strength in mechanical engineering. M .: *Mashgiz*, 1956;1:886. [In Russ]
2. Popov, E.P. Theory and calculation of flexible elastic rods. M.: *Science*. Ch. Ed. fiz.-mat. lit., 1986; 296. [In Russ]
3. A.V. Anfilofiev, V.M. Zamyatin The geometric representation of elliptic integrals. *News of Tomsk Polytechnic University* [Izvestiya TPU]. 2005; 308:5: 11-14. [In Russ]
4. Pat. No. 2706770 Russian Federation, IPC B 60G 11/10. S. A. Kuznetsov, A. S. Lichkovakha, and B. A. Shemshura, Elastic mechanism with a regressive-progressive characteristic. Application no. 09.01.2019; published no. 20.11.2019, Byul. no. 32. [In Russ]
5. Pat. No. 2486065 Russian Federation, IPC B60G 11/04. Elastic suspension with regressive-progressive characteristic. S.A. Kuznetsov, V.N. Semenov, Ya.A. Lysenko, Yu.Yu. Oleinicheva. Application. 15.02.2012; publ. 27.06.2013, Bul. No. 18[In Russ]
6. Pat. No. 2521879 Russian Federation, IPC B 60 G 3/16. V. N. Semenov, S. A. Kuznetsov, and A. A. Galushkin, Elastic suspension with regressive and progressive characteristics, IPC B 60G 3/16, Russian Federation. - Declared on 13.12.2012; published on 10.07.2014, Byul. no. 19. [In Russ]
7. Lichkovakha A. S., Shemshura B. A., Kuznetsov S. A. Investigation of the deformed state and displacements of a flexible rod with initial curvature. *Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences.* 2020;1 (47): 156-164. DOI:10.21822/2073-6185-2020-47-1-156--164[In Russ]
8. Lichkovakha A.S., Shemshura B. A., Kuznetsov S. A. Investigation of the deformation of a large flexible rod under axial loading. *The North Caucasus region. Technical Sciences.* 2016;3:71-76. DOI:10.17213/0321-2653-2016-191-3-71-76[In Russ]
9. Lichkovaha, AS, Investigation of the stress-strain state of an extra-centrally compressed rod of great flexibility / A.S. Lichkovaha, B.A. Shemshura, S.A. Kuznetsov. *Engineering Bulletin of the Don,* 2018; URL: ivdon.ru/en/magazine/archive/n1y2018/4773/.[In Russ]
10. Basov, K. A. ANSYS for designers. M.: DMK Press, 2009; 248. [In Russ]

Сведения об авторах:

Личковаха Андрей Сергеевич, кандидат технических наук, доцент; кафедра «Строительная механика»; lichkovaha@yandex.ru

Шемшура Борис Андреевич, кандидат технических наук, доцент, кафедра «Строительная механика»; stroi_meh@rgups.ru

Кузнецов Сергей Анатольевич, доктор технических наук, профессор, кафедра «Общеинженерные дисциплины»; sergey-kuznecov-57@mail.ru

Information about the authors:

Andrey S.Lichkovakha, Cand. Sci.(Eng), Assoc.Prof., Department of Building Mechanics; lichkovaha@yandex.ru

Boris A.Shemshura, Cand. Sci. (Eng), Assoc. Prof., Department of Construction Mechanics; stroi_meh@rgups.ru

Sergey A.Kuznetsov, Dr. Sci. (Eng), Prof., Department of General Engineering Disciplines; sergey-kuznecov-57@mail.ru

Конфликт интересов/ Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/Received 29.10.2022.

Одобрена после/рецензирования Reviced 16.11.2022.

Принята в печать/ Accepted for publication 16.11.2022.