

СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
BUILDING AND ARCHITECTURE

УДК 624.044

DOI:10.21822/2073-6185-2022-49-3-123-132

Оригинальная статья / Original Paper

Сочетание динамических и кинематических векторных возмущений балок
А.М. Казиев, З.Р. Лихов, А.Я. Джанкулаев, И.Ю. Кумышев, Г.А. Шигалугов
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173, Россия.

Резюме. Цель. Целью исследования является изучение работы балок при одновременном влиянии сочетанных воздействий: моменты на концах, кинематические гармонические перемещения обоих опор, распределённой нагрузки с разными амплитудами, частотами, фазами, наличии вязкого трения. **Метод.** Исследование основано на решении краевой задачи и моделировании. **Результат.** Исследованы вынужденные поперечные колебания балок постоянного сечения с учётом демпфирования. Рассмотрены непериодические, периодические и гармонические колебания балки от векторных возмущений. Приведены примеры решения для различных условий закреплений балки. **Вывод.** Авторскую разработку можно адаптировать к колебаниям стержней переменного сечения, к колебаниям континуально-дискретных стержней. Полученные передаточные функции позволяют рассчитывать элементы зданий в виде стержней на случайные процессы, учитывая их корреляцию.

Ключевые слова: балка, вязкое трение, частота, динамические и кинематические возмущения

Для цитирования: А.М. Казиев, З.Р. Лихов, А.Я. Джанкулаев, И.Ю. Кумышев, Г.А. Шигалугов. Сочетание динамических и кинематических векторных возмущений балок. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2022; 49(3): 123-132. DOI:10.21822/2073-6185-2022-49-3-123-132

Combination of dynamic and kinematic vector perturbations of beams
A.M. Kaziev, Z.R. Likhov, A.Ya. Dzhanakulaev, I.Yu. Kumyshev, G.A. Shigalugov
H.M. Berbekov Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevskogo Str., Nalchik 360004, Russia

Abstract. Objective. The aim of the study is to study the operation of beams under the simultaneous influence of combined actions: moments at the ends, kinematic harmonic displacements of both supports, a distributed load with different amplitudes, frequencies, phases, and the presence of viscous friction. **Method.** The study is based on solving a boundary value problem and modeling. **Result.** Investigated the forced transverse vibrations of beams with constant cross-section subject to damping. Considered non-periodic, periodic and harmonic oscillations of the beams from vector perturbations. Examples of solutions for various conditions bearings beams. **Conclusion.** The author's development can be adapted to vibrations of bars of variable cross section, to vibrations of continuous-discrete bars. The resulting transfer functions make it possible to calculate building elements in the form of rods for random processes, taking into account their correlation.

Keywords: beam, viscous friction, frequency, dynamic and kinematic disturbances

For citation: A.M. Kaziev, Z.R. Likhov, A.Ya. Dzhanakulaev, I.Yu. Kumyshev, G.A. Shigalugov. Combination of dynamic and kinematic vector perturbations of beams. Herald of the Daghestan State Technical University. Technical Science. 2022; 49(3): 123-132. DOI:10.21822/2073-6185-2022-49-3-123-132.

Введение. Колебание балки от различных видов нагрузок динамических и кинематических в отдельности хорошо изучены [1, 5, 7]. В данной работе ставилась задача изучения работы балок при одновременном влиянии пяти воздействий: моменты на концах, кинематические гармонические перемещения обоих опор, распределённой нагрузки с разными амплитудами, частотами, фазами, наличии вязкого трения [2, 3, 4].

Постановка задачи. Рассмотрим вынужденные установившиеся колебания балки при гармонических возмущениях в общем случае. Колебания балки рассмотрим на известных при-
 мерах.

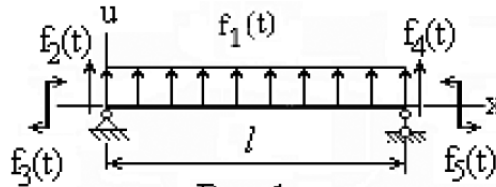


Рис. 1. Вынужденные установившиеся колебания балки при гармонических возмущениях
 Fig. 1. Forced steady oscillations of the beam under harmonic disturbances

1. Шарнирно опертая балка

Математическая модель задачи имеет вид

$$u^{IV} + \gamma \ddot{u} + \varepsilon \dot{u} = f_1(t), \quad f_1(t) = q(t)/EJ, \quad x \in (0, l), \quad t > -\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = f_2(t), \quad EJ u''(0, t) = f_3(t), \quad u(l, t) = f_4(t), \quad EJ u''(l, t) = f_5(t). \quad (2)$$

Здесь $\gamma = m/EJ$, $\varepsilon = \eta m/EJ$, $m = \rho S$ – погонная масса балки, η – коэффициент демпфирования, EJ – жёсткость балки на изгиб, $f_1(t)$ – соответствует распределённой нагрузке, $f_2(t)$, $f_4(t)$ – функции вертикальных перемещений левого и правого концов балки, $f_3(t)$, $f_5(t)$ – моментные нагрузки, приложенные к левому и правому концам балки.

Поскольку система является линейной с пятью входными воздействиями, целесообразно воспользоваться принципом суперпозиции

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^5 u_j(x, t),$$

где $u_j(x, t)$ – функция перемещений при автономном действии возмущения $f_j(t)$. Пусть внешние возмущения представлены векторным гармоническим процессом

$$f_k(t) = a_k e^{i(\Omega_k t + \psi_k)} = A_k e^{i\Omega_k t}, \quad k = 1, 2, \dots, 5. \quad (3)$$

где

$$\mathbf{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}, \quad A_k = a_k e^{i\psi_k}, \quad \mathbf{e}(t) = \{e^{i\Omega_1 t}, e^{i\Omega_2 t}, \dots, e^{i\Omega_5 t}\}, \quad k = 1, 2, \dots, 5.$$

a_k, A_k – вещественные и комплекснозначные амплитуды, ψ_k – начальные фазы или сдвиги фаз. С учётом (3), задача (1), (2) становится конкретной краевой задачей без начальных условий.

Вопрос далее будет состоять в том, чтобы отыскать её решение $u(x, t)$. Выходной процесс $u(x, t)$ в общем случае не будет гармоническим и, даже, периодическим. В то же время он будет суммой пяти гармоник с разными частотами Ω_k . Периодическими такие колебания будут лишь в том случае, если отношения Ω_j / Ω_k окажутся рациональными числами. Если все частоты возмущений одинаковые, т. е. $\Omega_1 = \Omega_2 = \dots = \Omega_5 = \Omega$, то выходной процесс будет гармоническим. Для этой задачи можно и амплитуду колебаний. Для вынужденных колебаний рассмотрим три варианта установившихся режимов: непериодические негармонические колебания; периодические негармонические колебания; гармонические колебания.

В первом и втором случаях покажем графики изменения перемещений во времени, в третьем случае найдём функцию амплитуды колебаний и построим формы её распределения вдоль оси. Реализацию принципа суперпозиции будем осуществлять в следующем порядке:

решим автономные задачи, когда на систему действует лишь одно из воздействий с единичной амплитудой $e^{i\Omega_k t}$.

В результате найдём гармоники $v_k(x, t)$, $k = 1, 2, \dots, 5$. Решение задачи от векторного воздействия будет суммой (скалярным произведением векторов)

$$u(x, t) = (A, v). \quad (4)$$

Применяя метод разделения переменных решение $v_k(x, t)$ будем искать в виде

$$v_k(x, t) = H_k(x, i\Omega_k) e^{i\Omega_k t}, \quad (5)$$

Рассмотрим автономные задачи.

1) Задача о колебаниях от поперечной нагрузки (рис. 2) имеет вид

$$v_1^{IV} + \gamma \ddot{v}_1 + \varepsilon \dot{v}_1 = e^{i\Omega_1 t}, \quad x \in (0, l), \quad t > -\infty, \quad (6)$$

$$v_1(0, t) = 0, \quad v_1''(0, t) = 0, \quad v_1(l, t) = 0, \quad v_1''(l, t) = 0. \quad (7)$$

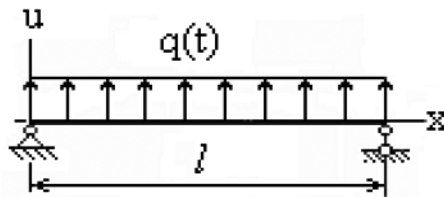


Рис. 2. Колебания от поперечной нагрузки
 Fig. 2. Transverse load vibrations

Подстановка (5) в (6), (7) при $k = 1$ даёт краевую задачу относительно передаточной функции H_1 при $a_1=1$

$$\begin{aligned} H_1^{IV} - b_1^4 H_1 &= 1, & b_1^4 &= -\gamma(i\Omega_1)^2 - \varepsilon(i\Omega_1), & x &\in (0, l), \\ H_1(0, i\Omega_1) &= 0, & H_1''(0, i\Omega_1) &= 0, & H_1(l, i\Omega_1) &= 0, & H_1''(l, i\Omega_1) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

Решение неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения состоит из суммы решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$H_1(x, i\Omega_1) = C_1 \sin b_1 x + C_2 \cos b_1 x + C_3 \operatorname{sh} b_1 x + C_4 \operatorname{ch} b_1 x - b_1^{-4}. \quad (9)$$

Здесь C_i – неизвестные постоянные интегрирования. Для использования граничных условий (8), продифференцируем (9) дважды

$$H_1''(x, i\Omega_1) = b_1^2 (-C_1 \sin b_1 x - C_2 \cos b_1 x + C_3 \operatorname{sh} b_1 x + C_4 \operatorname{ch} b_1 x). \quad (10)$$

(6)-(8) дают систему линейных уравнений относительно C_i

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 - b_1^{-4} &= 0, & -C_2 + C_4 &= 0, \\ C_1 \sin b_1 l + C_2 \cos b_1 l + C_3 \operatorname{sh} b_1 l + C_4 \operatorname{ch} b_1 l &= b_1^{-4}, \\ -C_1 \sin b_1 l - C_2 \cos b_1 l + C_3 \operatorname{sh} b_1 l + C_4 \operatorname{ch} b_1 l &= 0. \end{aligned}$$

Имеем решение

$$C_2 = C_4 = \frac{1}{2b_1^4}, \quad C_1 = \frac{1}{2b_1^4} \frac{1 - \cos b_1 l}{\sin b_1 l}, \quad C_3 = \frac{1}{2b_1^4} \frac{1 - \operatorname{ch} b_1 l}{\operatorname{sh} b_1 l}.$$

Следовательно, получено первое искомое уравнение

$$H_1(x, i\Omega_1) = \frac{1}{2b_1^4} \left(\frac{1 - \cos b_1 l}{\sin b_1 l} \sin b_1 x + \cos b_1 x + \frac{1 - \operatorname{ch} b_1 l}{\operatorname{sh} b_1 l} \operatorname{sh} b_1 x + \operatorname{ch} b_1 x - 2 \right). \quad (11)$$

Она описывает гармонические колебания, амплитуда которых определяется как модуль комплексной функции

$$a_u(x) = |A_1 H_1(x, i\Omega_1)|.$$

2) Правый конец стержня совершает гармонические колебания, остальные возмущения отсутствуют (рис. 3).

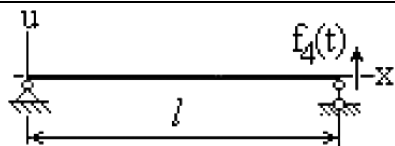


Рис. 3. Гармонические колебания стержня

Fig. 3. Harmonic vibrations of the rod

Соответствующие функции задачи принимают вид

$$f_1(t) = 0, \quad f_2(t) = 0, \quad f_3(t) = 0, \quad f_4(t) = e^{i\Omega_4 t}, \quad f_5(t) = 0.$$

Ищется функция $v_4(x, t)$ из задачи, составленной как в предыдущих случаях

$$v_4^{IV} + \gamma \ddot{v}_4 + \varepsilon \dot{v}_4 = 0 \quad x \in (0, l) \quad (12)$$

$$v_4(0, t) = 0, \quad v_4''(0, t) = 0, \quad v_4(l, t) = e^{i\Omega_4 t}, \quad v_4''(l, t) = 0, \quad t > -\infty. \quad (13)$$

По процедуре метода разделения переменных $v_4(x, t)$ представляется как произведение

$$v_4(x, t) = H_4(x, i\Omega_4) e^{i\Omega_4 t}. \quad (14)$$

Его подстановка в основное уравнение (12) и граничные условия (13) приводит к краевой задаче для передаточной функции

$$H_4^{IV} - b_4^4 H_4 = 0, \quad b_4^4 = -\gamma(i\Omega_4)^2 - \varepsilon(i\Omega_4), \quad x \in (0, l), \\ H_4(0, i\Omega_4) = 0, \quad H_4''(0, i\Omega_4) = 0, \quad H_4(l, i\Omega_4) = 1, \quad H_4''(l, i\Omega_4) = 0. \quad (15)$$

Её решение имеет вид (16)

$$H_4(x, i\Omega_4) = C_1 \sin b_4 x + C_2 \cos b_4 x + C_3 \operatorname{sh} b_4 x + C_4 \operatorname{ch} b_4 x. \quad (16)$$

$$H_4''(x, i\Omega_4) = b_4^2 (-C_1 \sin b_4 x - C_2 \cos b_4 x + C_3 \operatorname{sh} b_4 x + C_4 \operatorname{ch} b_4 x). \quad (17)$$

Подставим (16), (17) в граничные условия (15)

$$C_2 + C_4 = 0, \quad -C_2 + C_4 = 0, \\ C_1 \sin b_4 l + C_2 \cos b_4 l + C_3 \operatorname{sh} b_4 l + C_4 \operatorname{ch} b_4 l = 1, \\ -C_1 \sin b_4 l - C_2 \cos b_4 l + C_3 \operatorname{sh} b_4 l + C_4 \operatorname{ch} b_4 l = 0.$$

Отсюда имеем

$$C_2 = C_4 = 0, \quad C_1 = \frac{1}{2 \sin b_4 l}, \quad C_3 = \frac{1}{2 \operatorname{sh} b_4 l}.$$

Значит

$$H_4(x, i\Omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin b_4 x}{\sin b_4 l} + \frac{\operatorname{sh} b_4 x}{\operatorname{sh} b_4 l} \right). \quad (18)$$

Таким образом, $v_4(x, t)$ по (14) стала известной.

Амплитуда вынужденных гармонических колебаний определяется как модуль комплексной функции

$$a_u(x) = |A_4 H_4(x, i\Omega_2)|.$$

3) К правому концу приложена моментная нагрузка (рис. 4), остальные возмущения нулевые.

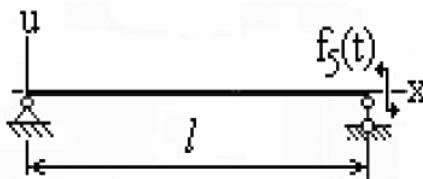


Рис. 4. Моментная нагрузка

Fig. 4. Torque load

Поэтому $f_1(x, t) \equiv f_2(t) \equiv f_3(t) \equiv f_4(t) \equiv 0$, $f_5(t) = e^{i\Omega_5 t}$,

$$v_5(0, t) = 0, \quad v_5''(0, t) = 0, \quad v_5(l, t) = 0, \quad EJ v_5''(l, t) = e^{i\Omega_5 t}.$$

Сначала, как и в предыдущих случаях, получим краевую задачу относительно передаточной функции $H_5^{IV} - b_5^4 H_5 = 0$, $b_5^4 = -(i\Omega_5)^2 - \varepsilon(i\Omega_5)$, $x \in (0, l)$,

$$H_5(0, i\Omega_5) = 0, \quad H_5''(0, i\Omega_5) = 0, \quad H_5(l, i\Omega_5) = 0, \quad EJ H_5''(l, i\Omega_5) = 1. \quad (19)$$

Нетрудно показать, что её решение имеет вид

$$H_5(x, i\Omega_5) = C_1 \sin b_5 x + C_2 \cos b_5 x + C_3 \operatorname{sh} b_5 x + C_4 \operatorname{ch} b_5 x. \quad (20)$$

$$H_5''(x, i\Omega_5) = b_5^4 (-C_1 \sin b_5 x - C_2 \cos b_5 x + C_3 \operatorname{sh} b_5 x + C_4 \operatorname{ch} b_5 x). \quad (21)$$

Подстановка (20), (21) в граничные условия (19) даёт

$$C_2 + C_4 = 0, \quad -C_2 + C_4 = 0,$$

$$C_1 \sin b_5 l + C_2 \cos b_5 l + C_3 \operatorname{sh} l b_5 + C_4 \operatorname{ch} l b_5 = 0,$$

$$EJ b_5^2 (-C_1 \sin b_5 l - C_2 \cos b_5 l + C_3 \operatorname{sh} l b_5 + C_4 \operatorname{ch} b_5 l) = 1.$$

Отсюда имеем

$$C_2 = C_4 = 0, \quad C_1 = -\frac{1}{2 EJ b_5^2 \sin b_5 l}, \quad C_3 = \frac{1}{2 EJ b_5^2 \operatorname{sh} b_5 l}.$$

$$\text{Значит, } H_5(x, i\Omega_5) = \frac{1}{2 EJ b_5^2} \left(\frac{\operatorname{sh} b_5 x}{\operatorname{sh} b_5 l} - \frac{\sin b_5 x}{\sin b_5 l} \right). \quad (22)$$

Функция $v_5(x, t)$ и амплитуда колебаний стали известны.

Недостающие передаточные функции $H_2(x, i\Omega_2)$, $H_3(x, i\Omega_3)$, могут быть выписаны заменив в (18) и (22) x на $l-x$, а именно

$$H_2(x, i\Omega_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin b_2(l-x)}{\sin b_2 l} + \frac{\operatorname{sh} b_2(l-x)}{\operatorname{sh} b_2 l} \right), \quad b_2^4 = -\gamma(i\Omega_2)^2 - \varepsilon(i\Omega_2), \quad (23)$$

$$H_3(x, i\Omega_3) = \frac{1}{2 EJ b_3^2} \left(\frac{\operatorname{sh} b_3(l-x)}{\operatorname{sh} b_3 l} - \frac{\sin b_3(l-x)}{\sin b_3 l} \right), \quad b_3^4 = -\gamma(i\Omega_3)^2 - \varepsilon(i\Omega_3). \quad (24)$$

При равенстве частот, т. е. $\Omega_1 = \Omega_2 = \dots = \Omega_5 = \Omega$, суммарные колебания будут гармоническими, и формула (2) примет вид

$$u(x, t) = [A, H(x, i\Omega)] e^{i\Omega t},$$

причём компоненты вектора $H(x, i\Omega)$ определяются по (11), (18), (22), (23), (24). Соответствующая амплитуда выписывается легко

$$a_u(x) = | [A, H(x, i\Omega)] |. \quad (25)$$

2. Балка с заделанным левым и шарнирно опертым правым концом.

Теперь, математическая модель задачи примет вид

$$u^{IV} + \gamma \ddot{u} + \varepsilon \dot{u} = f_1(t), \quad f_1(t) = q(t)/EJ, \quad x \in (0, l), \quad t > -\infty. \quad (26)$$

$$u(0, t) = f_2(t), \quad u'(0, t) = f_3(t), \quad u(l, t) = f_4(t), \quad EJ u''(l, t) = f_5(t).$$

Решение этой задачи осуществляем точно в такой же последовательности, как и в предыдущей задаче. Применяя принцип суперпозиции, решаем пять автономных задач от каждого возмущения в отдельности при единичной амплитуде $e^{i\Omega_k t}$.

После решения пяти автономных задач получены передаточные функции

$$H_1(x, i\Omega_1) = \frac{(1 - H_2(x, i\Omega_1) - H_4(x, i\Omega_1))}{b_1^4},$$

$$H_2(x, i\Omega_2) = \frac{\text{ch} b_2 l \cdot \sin b_2(l-x) + \cos b_2 l \cdot \text{sh} b_2(l-x)}{B_2},$$

$$H_3(x, i\Omega_3) = -\frac{\text{sh} b_3 l \cdot \sin b_3(l-x) - \sin b_3 l \cdot \text{sh} b_3(l-x)}{B_3 \cdot b_3},$$

$$H_4(x, i\Omega_4) = \frac{(\text{ch} b_4 l + \cos b_4 l) \cdot (\text{sh} b_4 x - \sin b_4 x) + (\sin b_4 l + \text{sh} b_4 l) \cdot (\cos b_4 x - \text{ch} b_4 x)}{2 \cdot B_4},$$

$$H_5 = \frac{(\text{ch} b_5 l - \cos b_5 l) \cdot (\text{sh} b_5 x - \sin b_5 x) + (\sin b_5 l - \text{sh} b_5 l) \cdot (\cos b_5 x - \text{ch} b_5 x)}{2 \cdot B_5 \cdot b_5^2 \cdot EJ},$$

где $B_j = \text{ch} b_j l \cdot \sin b_j l - \cos b_j l \cdot \text{sh} b_j l$, $b_j = -\gamma(i\Omega_j)^2 - \varepsilon(i\Omega_j)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Алгоритм процесса нахождения этих функций в точности совпадает с предыдущей задачей, поэтому представляем только полученные результаты.

Искомые гармоники представляются в форме (25), тогда решение задачи (26) при векторных возмущениях можно найти по формуле (4).

Обсуждение результатов. Возьмём стальную балку ($\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $E = 200 \text{ ГПа}$, $\eta = 1 \text{ с}^{-1}$) из двутавра № 14 ($J = 572 \text{ см}^4$, $S = 17,4 \text{ см}^2$), со свободно опертыми концами пролётом $l = 6 \text{ м}$.

Определим погонную массу и коэффициент

$$m = \rho S = 7800 \cdot 17,4 \cdot 10^{-4} = 13,57 \text{ кг/м}, \quad \gamma = \frac{m}{EJ} = \frac{13,57}{200 \cdot 10^9 \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 11,86 \cdot 10^{-6} \text{ с}^2 / \text{м}^4$$

Первые элементы спектра собственных частот которого, имеют значения

$$\{ 79,59, 318,39, 716,37, \dots \} \text{ с}^{-1}.$$

Пусть характеристики возмущений будут следующими

$$a_q = 700 \text{ Н/м}, \quad a_2 = 5 \text{ мм}, \quad a_3 = 4900 \text{ Нм}, \quad a_4 = 10 \text{ мм}, \quad a_5 = 980 \text{ Нм}.$$

Значения воздействий подобраны так, чтобы перемещения, вызванные ими, были соизмеримы. Сначала рассмотрим негармонические непериодические колебания, когда частоты и начальные фазы имеют значения

$$\Omega = \{ 5, 5\sqrt{2}, 5\pi, 23,4, 33,32 \} \text{ с}^{-1}, \quad \psi = \{ 0, 0, \pi, 0, \pi \}.$$

Обратим внимание на то, что выбранные начальные фазы соответствуют идеально синфазным возмущениям, т. е. имеющим направления, одновременно способствующие прогибу балки вверх или вниз.

Для середины балки ($x = \frac{l}{2} = 3 \text{ м}$) проведены вычисления по формуле (4) для интервала времени $t \in [0; 2] \text{ с}$, и результаты представлены кривой рис. 5.

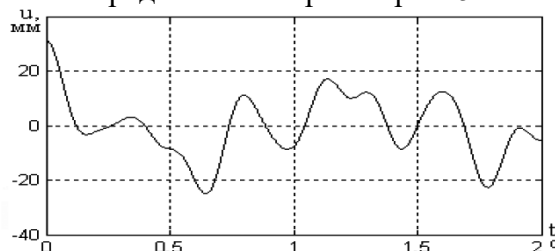


Рис. 5. Негармонические непериодические колебания
 Fig. 5. Non-harmonic non-periodic vibrations

Видно, что колебания носят негармонический непериодический характер и представляют сумму гармоник с разными частотами и амплитудами.

С теми же данными, но при частотах возмущений $\Omega = \{ 85, 68, 51, 34, 17 \} \text{ с}^{-1}$ колебания будут периодическими, так как они кратны 17 с^{-1} .

Вычисления, проведённые при амплитудах возмущений $a_q = 700 \text{ Н/м}$, $a_2 = 5 \text{ мм}$, $a_3 = 2900 \text{ Нм}$, $a_4 = 10 \text{ мм}$, $a_5 = 980 \text{ Нм}$, дали результаты, представленные графиками рис. 6.

Легко заметить, что вновь кривая является суммой гармоник, но уже колебания носят периодический характер. Период колебаний определяется по Ω_5 , а именно

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_5} = \frac{2 \cdot 3,141}{17} = 0,3695 \text{ с}^{-1}.$$

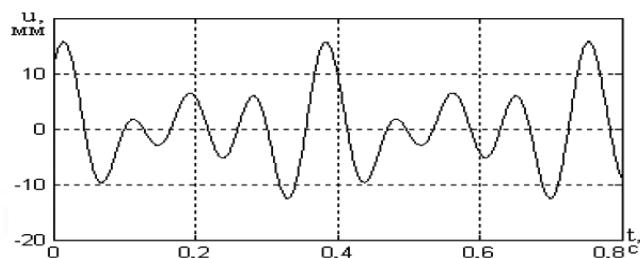


Рис. 6. Периодические колебания
Fig. 6. Periodic fluctuations

Теперь обратимся к гармоническим колебаниям, когда все частоты возмущений равны между собой

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \dots = \Omega_5 = \Omega.$$

Пусть при этом начальные фазы будут такими же, как прежде.

По формулам (25) проведены вычисления для амплитуд колебаний, результаты которых представлены графиками рис. 7.

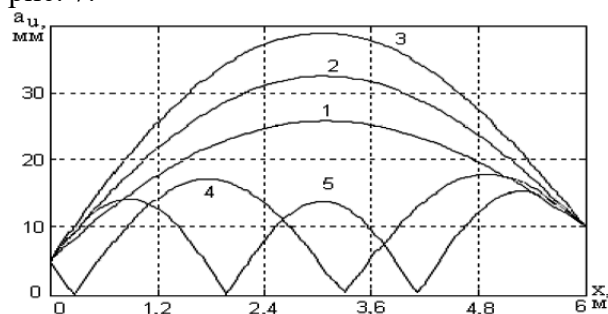


Рис. 7. Амплитуды колебаний
Fig. 7. Oscillation amplitude

Показаны кривые, полученные при возрастающих значениях частот $\Omega = 1 \text{ с}^{-1}$ (кривая 1), 36 с^{-1} (2), 45 с^{-1} (3), 307 с^{-1} (4), 625 с^{-1} (5), и амплитуд возмущений $a_q = 700 \text{ Н/м}$, $a_2 = 5 \text{ мм}$, $a_3 = 2900 \text{ Нм}$, $a_4 = 10 \text{ мм}$, $a_5 = 980 \text{ Нм}$ при сохранении остальных параметров.

Анализ кривых обнаруживает следующее. При сравнительно небольшой частоте возмущений (кривая 1) отклонения близки к статическим (например, в середине пролёта $u_{\text{стат}} \approx 25,6 \text{ мм}$). При росте частоты возмущений, она приближается к первой собственной частоте, и потому постепенно амплитуды увеличиваются (кривые 2, 3). Форма колебаний совпадает с первой собственной формой.

При дальнейшем возрастании частот возмущений достигается первая собственная частота балки, т. е. имеет место равенство $\Omega = 79,59 \text{ с}$, колебания становятся резонансными с весьма большими амплитудами (они здесь не показаны).

При частотах возмущений, превышающих первую собственную частоту, но меньших второй собственной частоты, сначала первая собственная форма в основном сохраняется, затем

появляется и играет основную роль вторая собственная форма (кривая 4). Дальнейший рост частот возмущений приводит к появлению высших форм колебаний (кривая 5).

Исследуем влияние сдвига фаз возмущений на вынужденные колебания. С этой целью проведены вычисления по той же формуле (25), и результаты представлены кривыми рис. 8.

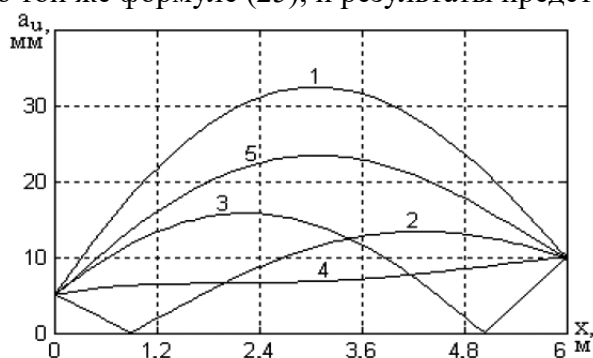


Рис. 8. Влияние сдвига фаз возмущений на вынужденные колебания
Fig. 8. Influence of phase shift of perturbations on forced oscillations

При фиксированной частоте возмущений Ω и предыдущих значениях других параметров рассмотрены четыре случая различных сочетаний начальных фаз

$$\begin{aligned} \Omega = 35 \text{ с}^{-1}, \quad \psi = \{ 0, 0, \pi, 0, \pi \} & \text{(кривая 1)}, \quad \psi = \{ 0, \pi, 0, 0, \pi \} & \text{(кривая 2)}, \\ \psi = \{ 0, 0, \pi, \pi, 0 \} & \text{(кривая 3)}, \quad \psi = \{ 0, \pi, 0, \pi, 0 \} & \text{(кривая 4)}, \\ \psi = \{ 0, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2, \pi/2 \} & \text{(кривая 5)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Кривая 1 соответствует идеально синфазным возмущениям, одновременно имеющим направления, способствующие прогибу балки вверх или вниз. Поэтому амплитуды являются наибольшими по всей серии вычислений.

Кривая 2 изображает колебания в том случае, когда перемещения левого конца и моментная нагрузка здесь же находятся в идеальной противофазе с остальными возмущениями. Поэтому недалеко от левого конца появилась нулевая точка, и, вообще, значения амплитуд заметно уменьшились.

Аналогичные эффекты имеют место и в том случае, когда возмущения на правом конце находятся в противофазе с остальными возмущениями (кривая 3).

Наименьшие отклонения отмечены для случая, когда концевые возмущения находятся в идеальной противофазе с поперечной нагрузкой (кривая 4).

Кривая 5 построена для возмущений, которые занимают промежуточное положение между случаями 1 и 4. Естественно, соответствующие амплитуды принимают также промежуточные значения.

Вывод. Поперечные колебания стержней, являются опасными для их прочности и устойчивости. Особенно опасны резонансы, когда частоты близки к собственным частотам балок.

Данную разработку можно адаптировать к колебаниям стержней переменного сечения, к колебаниям континуально-дискретных стержней.

Реальные сооружения подвергаются одновременному действию динамических и кинематических воздействий, имеющие разные параметры. Кроме того, многие воздействия являются случайными.

Полученные передаточные функции позволяют рассчитывать элементы зданий в виде стержней на случайные процессы, учитывая их корреляцию.

Приведённые здесь примеры свидетельствуют о необходимости расширения такой тематики исследований с включением и других типов колебаний: комбинаций продольных с поперечными, угловыми, крутильными, параметрическими и т.д.

Библиографический список:

1. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа. 1979. – 416 с.
2. Джанкулаев А.Я., Казиев А.М. Вынужденные колебания стержней при комбинированных возмущениях // Избранные труды научного семинара «Механика». Вып. 1. Нальчик: Каб.-Балк. гос. сель. акад., 2002. С.195-199.
3. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.
4. Казиев А. М. Колебания однородных и континуально-дискретных балок при векторных гармонических и случайных возмущениях: Дис. канд. техн. наук : 05.23.17 Нальчик, 2005 130 с. РГБ ОД, 61:05-5/3003.
5. Культербаев Х.П. Кинематически возбуждаемые колебания континуально-дискретной многопролётной балки // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. Труды X Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. 2011. №4, часть 2. С. 198-200.
6. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
7. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2002. 840 с.
8. Клаф З., Пензиен Дж. Динамика сооружений. М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
9. I.V. Kudinov, V.A. Kudinov. Mathematical simulation of the locally nonequilibrium heat transfer in a body with account for its nonlocality in space and time. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2015; 88(2): 406-422.
10. Amabili, M., Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. Cambridge University Press, New York, USA. (2008)
11. Refined beam elements with arbitrary cross-section geometries / E. Carrera, G. Giunta, P. Nali [and others] // Computers and Structures. 2010. V. 88, No 5-6. pp. 283-293.
12. Elishakoff I. Eigenvalues of Inhomogeneous Structures: Unusual Closed-form Solutions. Boca Raton, FL: CRC Press, 2005.
13. Hsu J.C., Lai H.Y., Chen C.K. Free vibration of non-uniform EulerBernoulli beams with general elastically end constraints using Adomian modified decomposition method. Journal of Sound and Vibration. 2008;318: 965-981.
14. Free vibration behavior of exponential functionally graded beams with varying cross-section / A.A Haasen, T. Abdelouahed, A.M. Sid [and others.] // Journal of Vibration and Control. 2011. V. 17, No 2. pp. 311-318.
15. Maurini C., Pofiri M., Pouget J. Numerical methods for modal analysis of stepped piezoelectric beams // Journal of Sound and Vibration. 2006. V. 298, No 4-5. pp. 918-933.
16. Zheng T. X., Ji T. J. Equivalent representations of beams with periodically variable crosssections // Engineering Structures. 2011. V. 33, No 3. pp. 706-719.
17. Tejada A. A Mode-Shape-Based Fault Detection Methodology for Cantilever Beams: Tech. Rep.: CR-2009-215721: NASA, 2009.
18. Alshorbagy A. E., Eltaher M. A., Mahmoud F. F. Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method // Applied Mathematical Modelling. 2011. V. 35, No 1. pp. 412-425.
19. Huang Y., Li X. F. A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section // Journal of Sound and Vibration. 2010. V. 329, No 11. pp. 2291-2303.
20. Mohanty S.C., Dash R.R., Rout T. Free vibration of a functionally graded rotating Timoshenko beam using FEM //International Journal of Advanced Structural Engineering. 2013. V. 16, No 2. pp. 405-418.
21. Ke L.L., Yang J., Kitipornchai S. An analytical study on the nonlinear vibration of functionally graded beams // Mechanics. 2010. V. 45, No 6. pp. 743-752.
22. Simsek M., Cansiz S. Dynamics of elastically connected doublefunctionally graded beam systems with different boundary conditions under action of a moving harmonic load. Composite Structures. 2012; 94(9): 2861-2878.

References:

1. Biderman V.L. Applied theory of mechanical oscillations. M.: Higher school. 1979; 416. (In Russ)
2. Dzhankulaev A.Ya., Kaziev A.M. Forced vibrations of rods under combined perturbations. Selected works of the scientific seminar "Mechanics". Nalchik: Kab.-Balk. State village acad., 2002;(1):195-199.
3. Babakov I.M. Theory of vibrations. M.: Nauka. 1968; 560. (In Russ)
4. Kaziev A. M., Oscillations of Homogeneous and Continuum-Discrete Beams under Vector Harmonic and Random Perturbations, Cand. cand. tech. Sciences: 05.23.17 Nalchik, 2005; 130. RSL OD, 61:05-5/3003. (In Russ)
5. Kulterbaev Kh.P. Kinematically excited vibrations of a continuous-discrete multi-span beam // Bulletin of the Nizhny Novgorod University. N.I. Lobachevsky. Proceedings of the X All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics. 2011; 4 (2): 198-200. (In Russ)
6. Timoshenko S.P. Fluctuations in engineering. M.: Nauka. 1967; 444. (In Russ)
7. Verzhbitsky V.M. Fundamentals of numerical methods. M.: Higher school; 2002; 840. (In Russ)
8. Clough Z., Penzien J. Dynamics of structures. M.: Stroyizdat. 1979; 320. (In Russ)
9. I.V. Kudinov, V.A. Kudinov. Mathematical simulation of the locally nonequilibrium heat transfer in a body with account for its nonlocality in space and time. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2015; 88(2):406-422.
10. Amabili M. Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. Cambridge University Press, New York, USA. 2008.
11. Refined beam elements with arbitrary cross-section geometries. E. Carrera, G. Giunta, P. Nali [and others]. Computers and Structures. 2010;88(5-6): 283-293.
12. Elishakoff I. Eigenvalues of Inhomogeneous Structures: Unusual Closed-form Solutions. Boca Raton, FL: CRC Press, 2005.
13. Hsu J.C., Lai H.Y., Chen C.K. Free vibration of non-uniform Euler Bernoulli beams with general elastically end constraints using Adomian modified decomposition method. Journal of Sound and Vibration. 2008;318: 965-981.
14. Free vibration behavior of exponentially functionally graded beams with varying cross-section. A.A Haasen, T. Abdelouahed, A.M. Sid [and others.] Journal of Vibration and Control. 2011;17(2):311-318.

15. Maurini C., Pofiri M., Pouget J. Numerical methods for modal analysis of stepped piezoelectric beams. *Journal of Sound and Vibration*. 2006; 298(4-5): 918-933.
16. Zheng T. X., Ji T. J. Equivalent representations of beams with periodically variable crosssections. *Engineering Structures*. 2011; 33(3): 706-719.
17. Tejada A. A Mode-Shape-Based Fault Detection Methodology for Cantilever Beams: Tech. Rep.: CR-2009-215721: NASA, 2009.
18. Alshorbagy A. E., Eltaher M. A., Mahmoud F. F. Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Applied Mathematical Modelling*. 2011; 35(1): 412-425.
19. Huang Y., Li X. F. A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section. *Journal of Sound and Vibration*. 2010; 329(11): 2291-2303.
20. Mohanty S.C., Dash R.R., Rout T. Free vibration of a functionally graded rotating Timoshenko beam using FEM. *International Journal of Advanced Structural Engineering*. 2013;16(2): 405-418.
21. Ke L.L., Yang J., Kitipornchai S. An analytical study on the nonlinear vibration of functionally graded beams. *Meccanica*. 2010; 45(6): 743-752.
22. Simsek M., Cansiz S. Dynamics of elastically connected doublefunctionally graded beam systems with different boundary conditions under action of a moving harmonic load. *Composite Structures*. 2012; 94(9):2861-2878.

Сведения об авторах:

Казиев Аслан Мугазович, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций и механики; kaziev1969@mail.ru

Лихов Залим Русланович, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой сопротивления материалов, теоретической и строительной механики; zalimhan@mail.ru

Джанкулаев Амирхан Яхьяевич, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций и механики; dzhankulaevaj@yandex.ru

Кумышев Ислам Юрьевич, магистрант; dzhankulaevaj@yandex.ru

Шигалугов Герман Арсенович, магистрант; dzhankulaevaj@yandex.ru

Information about the authors:

Aslan M. Kaziev, Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Prof., Department of Building Structures and Mechanics; kaziev1969@mail.ru

Zalim R. Likhov, Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Prof., Head of the Department of Strength of Materials, Theoretical and Structural Mechanics; zalimhan@mail.ru

Amirkhan Ya. Dzhankulaev, Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Prof., Department of Building Structures and Mechanics; dzhankulaevaj@yandex.ru

Islam Yu. Kumyshev, Undergraduate; dzhankulaevaj@yandex.ru

German A. Shigalugov, Undergraduate; dzhankulaevaj@yandex.ru

Конфликт интересов/ Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/Received 12.08.2022.

Одобрена после/рецензирования Revised 03.09.2022.

Принята в печать/ Accepted for publication 03.09.2022.