Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. Том 49, №3, 2022
Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences. Vol.49, No.3, 2022
http://vestnik.dgtu.ru/ ISSN (Print) 2073-6185 ISSN (On-line) 2542-095X

СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
BUILDING AND ARCHITECTURE

УДК 69.04
DOI:10.21822/2073-6185-2022-49-3-116-122 Оригинальная статья / Original Paper

Устойчивость многопролётных стержней

Л.А. Барагунова, М.М. Шогенова
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173, Россия

Резюме. Цель. При проектировании сложных инженерных сооружений в настоящее время проблема устойчивости становится особенно актуальной. С необходимостью удовлетворения условиям прочности, жёсткости при расчётах и конструировании обязательно нужно обеспечивать устойчивость равновесия как важнейшее требование. Независимо от вида расчётов на прочность (проверочный, проектировочный, нагрузочный) расчёт конструкции на устойчивость даже в наиболее простой постановке сводится к определению критических сил. Это позволяет оценить запас устойчивости конструкции при заданной нагрузке. Сложность определения критических параметров воздействия возрастает с усложнением рассматриваемой системы. **Метод.** Применение метода конечных разностей является особенностью при решении систем уравнений в задачах с граничными условиями. **Результат.** Определены точные значения критических сил в неклассических задачах устойчивости сжатых стержней, что доказывает полученная кривая с экрана монитора. **Вывод.** Изложены основные моменты теории расчёта при исследовании устойчивости многопролётных стержней. Для отыскания критических сил многопролётного стержня на упругих опорах приведён простой алгоритм решения задач.

Ключевые слова: многопролётные стержни, прочность, устойчивость, критические силы, переменные сечения, упругие опоры, численные методы, собственные значения и формы, метод конечных разностей, графический способ, дифференциальные уравнения, квадратная матрица, прогибы граничные условия

Для цитирования: Л.А. Барагунова, М.М. Шогенова. Устойчивость многопролётных стержней. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2022; 49(3): 116-122. DOI:10.21822/2073-6185-2022-49-3-116-122

Stability of multispan rods

L.A. Baragunova, M.M. Shogenova
H.M. Berbekov Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevskogo Str., Nalchik 360004, Russia

Abstract. Objective. In the design of complex engineering structures, the problem of stability is now becoming especially relevant. With the need to meet the conditions of strength, rigidity in calculations and design, it is imperative to ensure the stability of equilibrium as the most important requirement. Regardless of the type of strength calculations (verification, design, load), the calculation of a structure for stability, even in the simplest formulation, is reduced to the determination of critical forces. This allows us to estimate the stability margin of the structure under a given load. The complexity of determining the critical parameters of the impact increases with the complexity of the system under consideration. **Method.** The use of the finite difference method is a feature in solving systems of equations in problems with boundary conditions. **Result.** The exact values of critical forces in non-classical problems of the stability of compressed rods are determined, which is proved by the obtained curve from the monitor screen. **Conclusion.** The main points of the theory of calculation in the study of the stability of multi-span rods are outlined. To find the critical forces of a multi-span rod on elastic supports, a simple algorithm for solving problems is given.

Keywords: multi-span bars, strength, stability, critical forces, variable sections, elastic supports, numerical methods, eigenvalues and shapes, finite difference method, graphical method, differential equations, square matrix, deflections, boundary conditions.

For citation: L.A. Baragunova, M.M. Shogenova. Stability of multispan rods. Herald of the Daghestan State Technical University. Technical Science. 2022; 49(3): 116-122. DOI:10.21822/2073-6185-2022-49-3-116-122

Введение. Многопролётные стержни рассчитывают, как стержни, опирающиеся на упругие основания в тех случаях, когда податливостью опор пренебречь невозможно. С такими расчётными схемами приходится встречаться при расчёте междуэтажных балочных перекрытий, каркасов промышленных зданий, высоких мачт с оттяжками, мостов и т.д. Устойчивость многопролётных сжатых стержней с переменным сечением при наличии упругих промежуточных опор представляет собой сложную задачу.

Такие задачи решаются вычислением такого значения наименьшего параметра критической силы, которое будучи подставленным в уравнение обращает её в тождество. Гибкие опоры в сочетании с многопролётностью оказывают существенное влияние на собственные значения [1-3].

Аналитические методы не решают проблему определения собственных значений и форм. В таких случаях применяются численные методы. В частности, используется метод конечных разностей (МКР), старейший метод, который в настоящее время стал популярным из-за его относительно простого подхода к дискретизации дифференциальных уравнений. Исходные дифференциальные уравнения нужно превратить в эквивалентную систему алгебраических уравнений, для решения которых можно пользоваться вычислительной техникой. К достоинствам метода конечных разностей (метод сеток) можно отнести его универсальность, в отличие от аналитических методов, лёгкость построения решающего алгоритма и его программной реализации [4-9].

Постановка задачи. Определяется спектр собственных значений для сжатого силами F многопролётного стержня переменного сечения на промежуточных упругих опорах (рис.1).

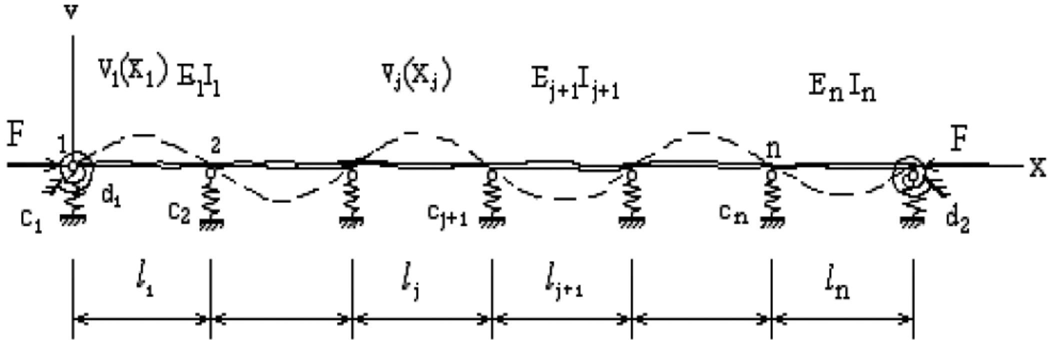

Рис. 1. Спектр собственных значений для сжатого силами F многопролётного стержня переменного сечения на промежуточных упругих опорах
Fig. 1. Spectrum of eigenvalues for a multi-span bar of variable cross section compressed by forces F on intermediate elastic supports

Гибкие упругие опоры имеют коэффициенты жёсткости на закручивание d_1, d_2, и на растяжение c_1, c_2, … c_{n+1}. Рассматриваемый стержень имеет пролёты l_j, с разными моментами инерции сечений $I_j(x)$, (j=1, 2 … n).

Изогнутая ось каждого пролёта при потере устойчивости стержня описывается дифференциальным уравнением четвёртого порядка

$$(B_j v_j'')'' + F v_j'' = 0, \qquad x_j \in (0, l_j), \qquad j = 1, 2, \ldots n. \tag{1}$$

Здесь $B_j(x_j) = EI(x_j)$ – жёсткость стержня при изгибе, $v_j(x_j)$ – функции прогибов; x_j – локальные координаты j-го пролёта с началом на левом конце.

С левого конца стержень имеет следующие граничные условия:

$$B_1(0)v_1''(0)-d_1v_1'(0)=0, \qquad [B_1(0)v_1''(0)]'+c_1v_1(0)+Fv_1'(0)=0, \tag{2}$$

С правого конца:

$$[B_n(l_n)v_n''(l_n)]'-c_{n+1}v_n(l_n)-Fv_n'(l_n)=0, \qquad B_n(l_n)v_n''(l_n)+d_2v_n'(l_n)=0\,. \tag{3}$$

Условия сопряжения j-го и (j + 1)-го пролётов:

$$v_j\left(\mathrm{l}_j\right)-v_{j+1}\left(0\right)=0, \quad v_j'\left(\mathrm{l}_j\right)-v_{j+1}'\left(0\right)=0, \quad B_j\left(\mathrm{l}_j\right)v_j''\left(\mathrm{l}_j\right)-B_{j+1}\left(0\right)v_{j+1}''\left(0\right)=0, \tag{4}$$

$$\left[B_j\left(\mathrm{l}_j\right)v_j''\left(\mathrm{l}_j\right)\right]'-\left[B_{j+1}\left(0\right)v_{j+1}''\left(0\right)\right]'-c_{j+1}\,v_{j+1}\left(0\right)=0. \tag{5}$$

Методы исследования. Используя метод конечных разностей, который представляет собой процедуру преобразования дифференциальных уравнений в системы частных производных, а также уравнений граничных и начальных условий в системы алгебраических уравнений, заменим в (1) область непрерывного изменения аргумента областью дискретного изменения [10-13]. Обозначим

$$L=\sum_{j=1}^{\mathrm{n}} l_j$$

и разобьём отрезок [0, L] на N – 1 равных частей.

Введём на этом отрезке сетку с шагом $h = L/(N-1)$.

В задаче (1) – (5) проведём замену дифференциальных операторов на конечноразностные.

Проведём последовательные преобразования основного уравнения (1) в точке i.

$$(B_jv_j'')_{\mathrm{i}}''+F(v_j'')_i=0, \qquad j=1,2,\dots n; \qquad i=3,\ 4,\ \dots..,\ n_j-2.$$

Здесь $\mathrm{n_j}$ – номер узловой точки над (j+1)–ой опорой в локальной системе координат (рис. 2). Далее такая процедура метода даёт

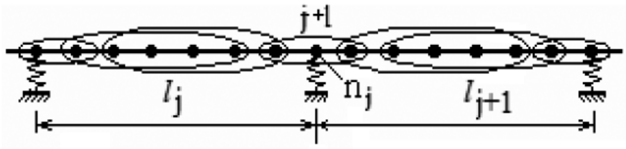

Рис. 2. Локальная система координат
Fig. 2. Local coordinate system

$$(B_jv_j'')_{\mathrm{i-1}}-2(B_jv_j'')_{\mathrm{i}}+(B_jv_j'')_{\mathrm{i+1}}+Fh^2(v_j'')_i=0, \quad j=1,2,\dots,n; \quad i=3,\ 4,\ \dots..,n_j-2.$$

$$L_j=\sum_{k=1}^{j}\mathrm{l}_k\,, \qquad\qquad n_j=L_j\big/h+1.$$

Переходя к конечным разностям, можно переписать уравнение в виде

$$\mathrm{B_{i-1}(y_{i-2}-2y_{i-1}+y_i)-2B_i(y_{i-1}\text{ - }2y_i+y_{i=1})+B_{i+1}(y_i-2y_{i+1}+y_{i+2})+}$$
$$\mathrm{+Fh^2(y_{i-1}-2y_i+y_{i+1})=0, \qquad j=1,\ 2,\quad n; \quad i=3,\ 4,\dots..,\ n_j-2,}$$

где введены обозначения

$$y_i\approx v(x_i), \qquad B_i=B(x_i)\,.$$

Приведение подобных членов даёт в окончательном виде

$$B_{i-1}y_{i-2}+\alpha_iy_{i-1}+\beta_iy_i+\gamma_iy_{i+1}+B_{i+1}y_{i+2}=0, \qquad i=3,4,\ \dots,n_j-2,$$

$$\alpha_i=-2B_{i-1}-2B_i+Fh^2,\ \ \beta_i=B_{i-1}+4B_i+B_{i+1}-2Fh^2,\ \ \gamma_i=-2B_i-2B_{i+1}+Fh^2.$$

Аналогичные преобразования проведём для граничных условий и условий сопряжения (2) - (5).

Левый конец (2):

$$B_1\frac{2y_1-5y_2+4y_3-y_4}{h^2}-d_1\frac{-3y_1+4y_2-y_3}{2h}=0$$

$$\left(4B_1+3d_1h\right)y_1+\left(-10B_1-4d_1h\right)y_2+\left(8B_1+d_1h\right)y_3-2B_1y_4=0$$

$$B_1'(0)v_1''(0)+B_1(0)v_1'''(0)-c_1v_1(0)+Fv_1'(0)=0$$

$$B_1'\frac{1}{h^2}(2y_1-5y_2+4y_3-y_4)+B_1\frac{1}{2h^3}(-5y_1+18y_2-24y_3+14y_4-3y_5)+$$

$$+c_1y_1+F\frac{1}{2h}(-3y_1+4y_2-y_3)=0$$

$$\left[4hB_1'-5B_1+2h^3c_1-3Fh^2\right]y_1+\left[-10hB_1'+18B_1+4Fh^2\right]y_2+$$
$$+\left[8hB_1'-24B_1-Fh^2\right]y_3+\left[-2hB_1'+14B_1\right]y_4-3B_1y_5=0$$

Правый конец (3):

$$B_N'(l_n)v_n''(l_n)+B_n(l_n)v_n'''(l_n)-c_{n+1}v_n(l_n)-Fv_n'(l_n)=0$$

$$B_N'\frac{1}{h^2}(-y_{N-3}+4y_{N-2}-5y_{N-1}+2y_N)+B_N\frac{1}{2h^3}(3y_{N-4}-14y_{N-3}+24y_{N-2}-$$

$$-18y_{N-1}+5y_N)-c_{n+1}y_N-F\frac{1}{2h}(y_{N-2}-4y_{N-1}+3y_N)=0.$$

$$3B_Ny_{N-4}+\left[-2hB_N'-14B_N\right]y_{N-3}+\left[8hB_N'+24B_N-Fh^2\right]y_{N-2}+$$
$$+\left[-10hB_N'-18B_N+4Fh^2\right]y_{N-1}+\left[4hB_N'+5B_N-2h^3c_{n+1}-3Fh^2\right]y_N=0$$

$$\mathrm{B_N}\frac{1}{\mathrm{h}^2}(-\mathrm{y_{N-3}}+4\mathrm{y_{N-2}}-5\mathrm{y_{N-1}}+2\mathrm{y_N})+\mathrm{d_2}\frac{1}{2\mathrm{h}}(\mathrm{y_{N-2}}-4\mathrm{y_{N-1}}+3\mathrm{y_N})=0.$$

$$-2B_Ny_{N-3}+\left(8B_N+d_2h\right)y_{N-2}+\left(-10B_N-4d_2h\right)y_{N-1}+\left(4B_N+3d_2h\right)y_N=0$$

Сопряжение участков:

$$\frac{1}{2h}\left(y_{N_j-2}-4y_{N_j-1}+3y_{N_j}\right)-\frac{1}{2h}\left(-3y_{N_j}+4y_{N_j+1}-y_{N_j+2}\right)=0$$

$$\mathrm{y_{N_j-2}}-4\mathrm{y_{N_j-1}}+6\mathrm{y_{N_j}}-4\mathrm{y_{N_j+1}}+\mathrm{y_{N_j+2}}=0$$

$$B_j(l_j)\frac{1}{h^2}\left(-y_{N_j-3}+4y_{N_j-2}-5y_{N_j-1}+2y_{N_j}\right)-B_{j+1}(0)\frac{1}{h^2}\left(2y_{N_j}-5y_{N_j+1}+4y_{N_j+2}-y_{N_j+3}\right)=0$$

$$B_j(l_j)\left(-y_{N_j-3}+4y_{N_j-2}-5y_{N_j-1}\right)+2\left[B_j(l_j)-B_{j+1}(0)\right]y_{N_j}-$$
$$-B_{j+1}(0)\left(-5y_{N_j+1}+4y_{N_j+2}-y_{N_j+3}\right)=0$$

$$B_j'(l_j)\frac{1}{h^2}\left(-y_{N_j-3}+4y_{N_j-2}-5y_{N_j-1}+2y_{N_j}\right)+B_j(l_j)\frac{1}{2h^3}\left(3y_{N_j-4}-14y_{N_j-3}+\right.$$

$$\left.+24y_{N_j-2}-18y_{N_j-1}+5y_{N_j}\right)-B_{j+1}'(0)\frac{1}{h^2}\left(2y_{N_j}-5y_{N_j+1}+4y_{N_j+2}-y_{N_j+3}\right)-$$

$$-B_{j+1}(0)\frac{1}{2h^3}\left(-5y_{N_j}+18y_{N_j+1}-24y_{N_j+2}+14y_{N_j+3}-3y_{N_j+4}\right)-c_{j+1}y_{N_j}=0$$

$$3B_j(l_j)y_{N_j-4}+[-2hB_j'(l_j)-14B_j(l_j)]y_{N_j-3}+[8hB_j'(l_j)+24B_j(l_j)]y_{N_j-2}+$$
$$+[-10hB_j'(l_j)-18B_j(l_j)]y_{N_j-1}+[4hB_j'(l_j)+5B_j(l_j)-4hB_{j+1}'(0)+5B_{j+1}(0)-$$
$$-2h^3c_{j+1}]y_{N_j}+[10hB_{j+1}'(0)-18B_{j+1}(0)]y_{N_j+1}+[-8hB_{j+1}'(0)+24B_{j+1}(0)]y_{N_j+2}+$$
$$+[2hB_{j+1}'(0)-14B_{j+1}(0)]y_{N_j+3}+3B_{j+1}(0)y_{N_j+4}=0.$$

Особенностью при решении систем уравнений в задачах с граничными условиями методом конечных разностей является то, что матрица коэффициентов левой части системы оказывается разряжённой, содержащей множество нулевых элементов. Это связано с тем, что в конечно-разностных выражениях для вычисления производной используется несколько соседних узлов, а не все узлы сетки.

Результатом применения метода конечных разностей к задаче (1) - (5) является однородная система алгебраических уравнений в матрично-векторной форме

$$A\ y = 0. \qquad (6)$$

Элементы квадратной матрицы **A** порядка N образуются в ходе преобразований, приведённых выше. Они содержат искомые значения F, т.е.

$$a_{ij} = a_{ij}(F).$$

Компоненты вектора **y** = $\{y_1,\ y_2,\ \ldots y_n\}$ соответствуют значениям прогибов в узловых точках. Ненулевые значения элементов вектора **A** возможны лишь в том случае, если определитель матрицы **A** равен нулю.

Это требование приводит к алгебраическому уравнению

$$\det \mathbf{A}(F) = 0, \qquad (7)$$

решение, которого аналитическими методами затруднительно и достигается лишь в некоторых случаях.

Обсуждение результатов. Аналитические методы обладают невысокой степенью универсальности, ориентированы на решение простых задач. Приближённые значения корней можно найти графическими способами (7) с помощью современных компьютерных средств.

У графического способа есть преимущества: лёгкость обозрения в целом, непрерывность изменения аргумента [14-16]. С этой целью в координатной системе F – det(**A**) строится кривая, точки пересечения которой с осью F и определяют значения критических сил [17-19].

Рассмотрим конкретный пример с параметрами для вычислений первых критических сил [20].

Трёхпролётный стержень с параметрами n = 3, d = {300; 100} Нм, c = {1000; 1500; 1000; 1500} Н/м, l = {1, 1, 1} м.

$$h = 0{,}05\ \text{м},\quad B(x) = B_0 + B_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\ \text{Па·м}^4,\quad B_0 = 200\ \text{Па·м}^4,\quad B_1 = 10\ \text{Па·м}^4.$$

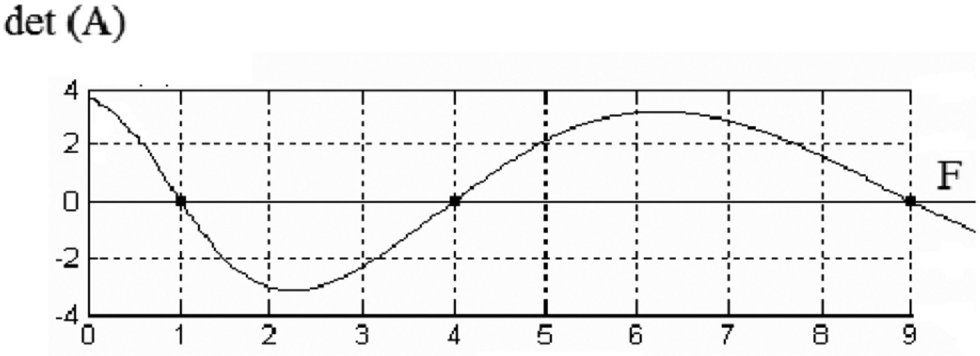

Рис. 3. Степень точности алгоритма
Fig. 3. The degree of accuracy of the algorithm

Кривая с экрана монитора показывает эффективность метода. Степень близости двух результатов говорит о высокой степени точности алгоритма (рис.3).

Первые элементы спектра собственных значений с монитора ЭВМ равны

$$\mathbf{F} = \{947;\ 1301;\ 3560;\ 4092;\ \ldots\}\ \text{Н}.$$

Вывод. Аналитические методы в сочетании с методом конечных разностей решения характеристического уравнения дают точные значения критических сил в неклассических задачах устойчивости сжатых стержней.

Выявление критических сил, формы потери устойчивости имеет практическое значение: её анализ позволяет принимать обоснованные инженерные решения по внесению эффективных изменений в проект конструкции или сооружения с целью повышения устойчивости.

Библиографический список:

1. Масленников А.М. Динамика и устойчивость сооружений. Учебник и практикум для вузов. – М. : Издательство Юрайт. 2016. -366 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука. 1967. 984 с.
3. Леонтьев Н.Н. Основы строительной механики стержневых систем: Учеб. для строит. спец. вузов. / Н.Н. Леонтьев, Д.Н. Соболев, А.А. Амосов. – М.: Изд-во АСВ, 1996. – 541 с.
4. Безухов Н.И. Устойчивость и динамика в примерах и задачах: Учеб.пособие для строит. спец. вузов / Н.И. Безухов, О.В. Лужин, Н.В. Колкунов. – М.: Высшая школа, 1987. – 264 с.
5. Крамаренко А.А. Устойчивость и динамика сооружений: Сборник задач для самостоятельной работы студентов / Новосиб. гос. акад. стр-ва. – Новосибирск: НГАС, 1994. – 36 с.
6. Самарский А.А. Введение в численные методы. – 2-ое издание., - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987.-288 с.
7. Алфутов Н.А. Основы расчёта на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение. 1978. 312с.
8. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.,1989. -432 с.
9. Варвак П.М., Варвак Л.П. Метод сеток в задачах расчёта строительных конструкций. М.: Стройиздат, 1977. 154 с.
10. Караманский Т.Д. Численные методы строительной механики. –М.: Стройиздат, 1981. - 436 с.
11. Sorin Micu, Ionel Rovenţa, Laurenţiu Emanuel Temereancă. Approximation of the controls for the linear beam equation. Springer-Verlag London, 2016. URL: researchgate.net/publication/294736245 Approximation of the controls for the linear beam equation.
12. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2002. 840 с.
13. Ильин В.П., Карпов В.В., Масленников А.М. Численные методы решения задач строительной механики. – М.: Изд-во АСВ; СПб.: СПбГАСУ, 2005. - 425 с.
14. Kulterbaev Kh.P., Baragunova L.A., Shogenova M.M., Senov Kh. M. About a High-Precision Graphoanalytical Method of Determination of Critical Forces of an Oblate Rod. Proceedings 2018 IEEE International Conference "Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies" (IT&QM&IS). September, 24-28, 2018. St. Petersburg. Russia 2018. P. 794-796.
15. Культербаев Х.П., Барагунова Л.А. О реализации проблемы собственных значений сжато-растянутого стержня на компьютере. Компьютерные технологии в строительстве: Материалы Всероссийской научно-технической конференции. ДГТУ. –Махачкала: Алеф (ИП Овчинников), 2012. С. 90-94.
16. Шогенова М.М., Шогенов О.М., Барагунова Л.А. Решение задачи Эйлера об устойчивости стержня с неклассическими граничными условиями. Инженерный вестник Дона, 2021, №11. URL: http://go.microsoft.com/fwlink/?LinkId=69157.
17. Литвинов С.В., Язьев Б.М., Бескопыльный А.Н., Ананьев И.В. Расчёт на устойчивость стержней из ЭДТ-10 при начальной погиби стержня в виде S-образной кривой. Инженерный вестник Дона, 2012, №1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2012/620/.
18. Барагунова Л.А. Устойчивость предварительно сжимаемой арматуры в железобетонных балках. // Инженерный вестник Дона, 2016, №4. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2016/3797/.
19. Барагунова Л.А. О влиянии упругости опор на устойчивость сжатых стержней. Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). ООО «Издательский Дом – Юг», Кубанский гос. Ун-т, 2013, № 1 – 2. Стр. 49 – 54.
20. Барагунова Л.А., Шогенова М.М. Потеря устойчивости стержня при неравномерно распределённой нагрузке. Инженерный вестник Дона, 2018, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/ archive/n1y2018/4810.

References:

1. Maslennikov A.M. Dynamics and Stability of Structures. Textbook and Practice for Higher Education Institutions. M. : *Publishing house Yurait.* 2016; 366. (In Russ)
2. Volmir A.S. Stability of deformable systems. Moscow : *Nauka.* 1967; 984. (In Russ)
3. Leontiev N.N. Fundamentals of Structural Mechanics of Rod Systems: Textbook for Building Specialties of Higher Education Institutions. / N.N. Leontiev, D.N. Sobolev, A.A. Amosov. Moscow: *Publishing House ASV*, 1996; 541. (In Russ)
4. Bezukhov N.I. Stability and Dynamics in Examples and Problems: Textbook for Building Specialties of Higher Education Institutions / N.I. Bezukhov, O.V. Luzhin, N.V. Kolkunov. - Moscow: High School, 1987; 264. (In Russ)
5. A.A. Kramarenko, Stability and Dynamics of Structures: Collection of Tasks for Independent Studying / Novosibirsk State Academy of Civil Engineering. Novosibirsk: NGAS, 1994; 36. (In Russ)
6. Samarsky A.A. Introduction in numerical methods. - 2nd edition. M.: Nauka. Main Editorial Office for Physical and Mathematical Literature, 1987. (In Russ)
7. Alfutov N.A. Fundamentals of calculating the stability of elastic systems. Moscow: *Mashinostroenie.* 1978;312. (In Russ)
8. Samarsky A.A., Gulin A.V. Numerical Methods. Moscow: *Nauka,* G. Ed. of Physics and Mathematics, 1989; 432. (In Russ)
9. Varvak P.M., Varvak L.P. Method of grids in the tasks of calculating building structures. Moscow: *Stroyizdat.* 1977; 154.

10. Karamansky T.D. Numerical methods of structural mechanics. M.*: Stroyizdat.* 1981; 436. (In Russ)
11. Sorin Micu, Ionel Roventa, Laurenţiu Emanuel Temereancă. Approximation of the controls for the linear beam equation. Springer-Verlag London, 2016. URL: researchgate.net/publication/294736245 Approximation of the controls for the linear beam equation.
12. Verzhbitsky V.M. Fundamentals of numerical methods. Moscow: *High school*, 2002; 840. (In Russ)
13. Ilyin V.P., Karpov V.V., Maslennikov A.M. Numerical methods of solving problems of structural mechanics. - Moscow: Publishing house ASV; Saint-Petersburg: Saint-Petersburg State University of Civil Engineering and Architecture, 2005; 425. (In Russ)
14. Kulterbaev Kh. P., Baragunova L.A., Shogenova M.M., Senov Kh. M. About a High-Precision Graphoanalytical Method of Determination of Critical Forces of an Oblate Rod. Proceedings 2018 IEEE International Conference "Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies" (IT&QM&IS). September, 24-28, 2018. St. Petersburg. Russia 2018; 794-796. (In Russ)
15. Kulterbaev Kh.P., Baragunova L.A. About realization of the problem of eigenvalues of a compressed-stretched rod on computer. Computer Technology in Construction: Proceedings of the All-Russian Scientific and Technical Conference. DSTU. - Makhachkala: Alef (IP Ovchinnikov), 2012; 90-94. (In Russ)
16. Shogenova M.M., Shogenov O.M., Baragunova L.A. Solving the Euler problem on the stability of a rod with non-classical boundary conditions. *Engineering Herald of the Don*. 2021, №11. URL: http://go.microsoft.com/fwlink/?LinkId=69157. (In Russ)
17. Litvinov S.V., Yazyev B.M., Beskopylny A.N., Ananyev I.V. Calculation of Stability of Rods from EDT-10 with Initial Death of Rod as S-Curve. *Engineering Herald of the Don* 2012, 1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2012/620/.
18. Baragunova L.A. Stability of pre-compressed reinforcement in reinforced concrete beams. *Engineering Herald of the Don* 2016, №4. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2016/3797/.(In Russ)
19. Baragunova L.A. On the effect of elasticity of supports on the stability of compressed rods. *Science. Technique. Technology (Polytechnic Bulletin).* LLC "Publishing House-Yug", Kuban State University, 2013;1 – 2: 49 - 54. (In Russ)
20. Baragunova L.A., Shogenova M.M. Stability loss of a rod under unevenly distributed load. *Engineering Herald of the Don.* 2018;1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/ archive/n1y2018/4810. (In Russ)

Сведения об авторах:

Барагунова Лялюся Адальбиевна, старший преподаватель кафедры строительных конструкций и механики; baragunoval@mail.ru

Шогенова Марьяна Мухарбиевна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры строительных конструкций и механики; shogenova_mar@mail.ru

Information about the authors:

Lyalyusya A. Baragunova, Senior Lecturer, Department Building Structures and Mechanics; baragunoval@mail.ru

Maryana M. Shogenova, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Assoc. Prof., Assoc. Prof., Department Building Structures and Mechanics; shogenova_mar@mail.ru

Конфликт интересов/ Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/Received 30.07.2022.

Одобрена после/рецензирования Reviced 21.08.2022.

Принята в печать/ Accepted for publication 21.08.2022.