

СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
BUILDING AND ARCHITECTURE

УДК 69.04

DOI:10.21822/2073-6185-2022-49-2-87-93

Оригинальная статья / Original Paper

Продольные колебания стержней от динамических и кинематических возмущений

Л.А. Барагунова, М.М. Шогенова

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173, Россия

Резюме. Цель. В современной технике широко распространены упругие конструкции сооружений, машин, технических устройств. В реальных условиях стержни испытывают колебания от динамических и кинематических возмущений. Целью работы является разработка методов и алгоритмов решения задач о колебаниях при динамических и кинематических возмущениях. **Метод.** Исследование основано на применении гипотезы плоских сечений и принципа Даламбера. **Результат.** Рассмотрена задача продольного свободного и вынужденного колебаний стержней. В результате найдена функция смещения поперечных сечений в продольном направлении стержня, получены спектры собственных форм φ_n и собственных частот ω_n колебания. **Вывод.** Создан комплекс программ расчета, позволяющий осуществлять решение задач о колебаниях стержней. Получены спектры собственных частот ω_n и собственных форм $\varphi_n(x)$ колебания, найдена $u(x, t)$ – функция смещения поперечных сечений в продольном направлении стержня.

Ключевые слова: однородный стальной стержень, амплитуда колебаний, продольные, свободные и вынужденные колебания, динамические и кинематические возмущения, принцип Даламбера, дифференциальные уравнения, граничные условия, вычислительный комплекс Matlab, поперечные сечения, продольная сила, нормальные напряжения

Для цитирования: Л.А. Барагунова, М.М. Шогенова. Продольные колебания стержней от динамических и кинематических возмущений. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2022; 49(2): 87-93. DOI:10.21822/2073-6185-2022-49-2-87-93

Longitudinal vibrations of rods from dynamic and kinematic perturbations

L.A. Baragunova, M.M. Shogenova

H.M. Berbekov Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevskogo Str., Nalchik 360004, Russia

Abstract. Objective. In modern technology, elastic structures of structures, machines, and technical devices are widespread. In real conditions, the rods experience oscillations from dynamic and kinematic disturbances. The aim of the work is to develop methods and algorithms for solving problems of oscillations under dynamic and kinematic disturbances. **Method.** The study is based on the application of the hypothesis of flat sections and the d'Alembert principle. **Result.** The problem of longitudinal free and forced vibrations of rods is considered. As a result, the displacement function of transverse sections in the longitudinal direction of the rod was found, the spectra of natural forms φ_n and natural frequencies ω_n of vibrations were obtained. **Conclusion.** A set of calculation programs has been created, which makes it possible to solve problems of rod vibrations. Spectra of eigenfrequencies ω_n and eigenmodes $\varphi_n(x)$ of vibrations are obtained, and $u(x, t)$ is found, the function of displacement of cross sections in the longitudinal direction of the rod.

Keywords: homogeneous steel rod, vibration amplitude, longitudinal vibrations, free and forced vibrations, dynamic and kinematic perturbations, D'Alembert principle, differential equations, boundary conditions, Matlab computer complex, cross-sections, longitudinal force, normal stresses

For citation: L.A. Baragunova, M.M. Shogenova. Longitudinal vibrations of rods from dynamic and kinematic perturbations. Herald of the Daghestan State Technical University. Technical Science. 2022; 49(2): 87-93. DOI:10.21822/2073-6185-2022-49-2-87-93

Введение. Колебания стержней и стержневых систем длительное время привлекают внимание проектировщиков. Требования к сооружениям, машинам вызвали особый интерес к изучению колебаний от динамических и кинематических возмущений. [1-4]. Продольным свободным и вынужденным колебаниям стержней посвящена обширная библиография. Следует отметить, что они подробно описаны в литературных источниках [5-8].

Постановка задачи. Целью работы является разработка методов и алгоритмов решения задач о колебаниях при динамических и кинематических возмущениях.

Методы исследования. Свободными или собственными являются колебания, возникающие в системе вследствие внешнего возбуждения, из-за чего создается начальное отклонение от положения равновесия. Продолжаются свободные колебания при наличии упругих внутренних сил, восстанавливающих равновесие.

Изобразим расчётную схему и рассмотрим продольные свободные колебания. Рассматривается однородный стержень (рис.1.) с полной массой $m = \rho \cdot A$ (ρ - плотность материала, A – площадь поперечного сечения), совершающий колебания в продольном направлении [9-12]. При этом допускаем применение гипотезы плоских сечений: поперечное сечение стержня плоское и перпендикулярное геометрической оси до деформации таким и после деформации.

Продольные свободные колебания Longitudinal free vibrations

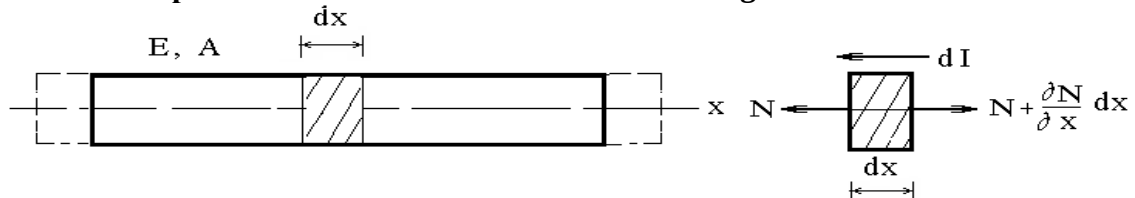


Рис. 1. Расчётная схема. Стержень и выделенный элемент

Fig 1. Calculation scheme. Bar and selected element

По принципу Даламбера принимаем, что все внешние силы, действующие на механическую систему при ее движении, всегда уравниваются силами инерции.

Продольные перемещения сечений характеризуются функцией $u(x, t)$. Относительная деформация равна $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ и пропорциональна напряжению. Тогда по закону Гука можно записать

$$N = \sigma A = EA = EA\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1)$$

A – площадь поперечного сечения, σ – нормальное напряжение, E – модуль Юнга, который зависит от свойств материала и не зависит от формы и размеров. Для получения основного уравнения колебаний рассмотрим равновесие выделенного элемента dx . Сила инерции (Даламберова сила) при этом равна

$$dI = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$$

Проектируя приложенные силы к выделенному элементу силы на главную ось стержня, получим

$$-N - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx + N + \frac{\partial N}{\partial x} dx = 0.$$

Учитывая (1), перепишем

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

После преобразований получаем уравнение поперечного колебания однородного стержня постоянного сечения, являющееся однородным дифференциальным уравнением в частных производных гиперболического типа.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x \in (0, l), \quad a^2 = E / \rho. \quad (2)$$

Уравнение (2) идентично классическому уравнению свободного колебания однопролетной однородной струны. Добавим к задаче (2) граничные условия, которые могут быть самими разнообразными в зависимости от условий закрепления концов стержня [13-16]. Рассмотрим частный случай жесткого закрепления на обоих концах стержня. При этом граничные условия будут иметь вид

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \quad (3)$$

Решение задачи (2), (3) отыскивается с помощью метода разделения переменных как произведение $u(x, t) = X(x) e^{i\omega t}$.

Подстановка по методу разделения переменных в (2) даёт

$$X(x) = A \sin kx + B \cos kx, \quad k = \omega / a, \quad a = \sqrt{E / \rho}.$$

И подстановка в граничные условия (3) [$X(0) = 0, \quad X(l) = 0$]

$$Xk(x) = k(A \cos kx + B \sin kx),$$

$$B = 0, \quad \cos k_1 = 0, \quad k_1 = \frac{\pi(2n-1)}{2l}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \frac{\omega}{a} l = \frac{\pi(2n-1)}{2}.$$

Далее получаем спектр собственных частот колебаний ω_n и собственных форм $\varphi_n(x)$

$$\omega_n = \frac{\pi a(2n-1)}{2l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

$$X(x) = A \sin kx, \quad \varphi(x) = \sin kx, \quad k_n = \frac{\pi(2n-1)}{2l},$$

$$\varphi_n(x) = \sin \frac{\pi(2n-1)}{2l} x. \quad (5)$$

Обсуждение результатов. Для входных параметров $a = 1, l = 1$ формула (4) дает табл. 1 первых 4-х собственных частот.

Таблица 1. Собственные частоты

Table 1. Natural frequencies

n	1	2	3	4
ω_n	1,5711	4,7121	7,8543	10,9956

Собственные формы колебаний отыскивали при помощи вычислительной комплекса MATLAB, который может многократно увеличивать полученный график. Он позволяет с высокой степенью точности получать результаты. Графики показаны на рис. 2.

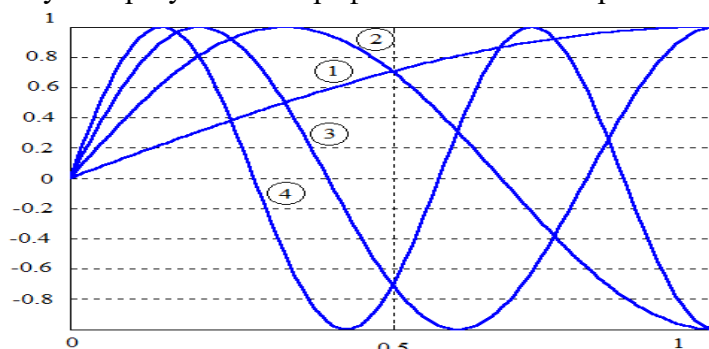


Рис.2. Собственные формы колебаний

Fig.2. Natural waveforms

Вынужденные колебания от динамических возмущений. Вынужденными называются колебания стержней, происходящие при действии на нее в течение всего процесса колебаний внешних периодически изменяющихся вынуждающих сил. При проектировании конструкций,

подверженных вынужденным колебаниям от динамических возмущений, чаще всего стараются подобрать соотношения размеров и масс, чтобы не было резонанса [17-20].

Колебательный процесс позволяет при больших динамических воздействиях сделать амплитуду вынужденных колебаний меньше за счет подбора соотношений между частотами (рис. 3, табл. 2).

При динамическом нагружении функция амплитуд колебаний имеет следующий вид

$$A(x) = \frac{F}{ES} \sin kx / k \cos kl. \quad (7)$$

Для амплитуды напряжений имеем формулу

$$A_{\sigma}(x) = \frac{F}{S} \frac{\cos kx}{\cos kl}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что

$$A_{\sigma}(l) = \frac{F}{S}, \quad \omega=0 \Rightarrow A_{\sigma}(x) = \frac{F}{S}. \quad (9)$$

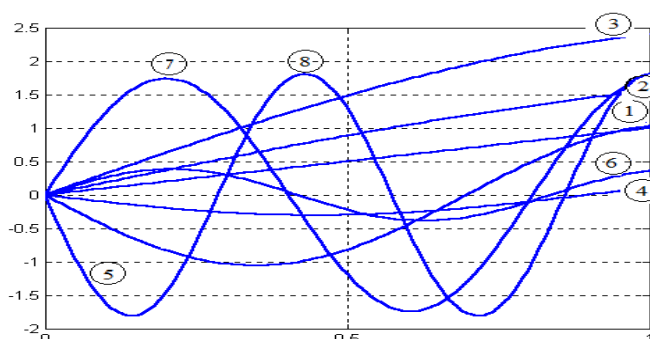


Рис.3. Графики амплитуд $H(x)$ от динамических возмущений
Fig.3. Plots of amplitudes $H(x)$ from dynamic perturbations

Таблица 2. Собственные частоты
Table 2. Natural frequencies

n	1	2	3	4	5	6	7	8
ω_n	0,01	1	1,25	3,5	4,5	7,5	7,78	10,945

Вынужденные колебания от кинематических возмущений. При кинематических возмущениях получена формула

$$A(x) = b(\operatorname{tg} kl \sin kx + \cos kx). \quad (10)$$

Она даёт амплитуду напряжений и её свойства

$$A_{\sigma}(x) = Ekb (\operatorname{tg} kl \cos kx - \sin kx), \quad (11)$$

$$A_{\sigma}(l) = 0; \quad \omega = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow A_{\sigma}(x) = 0. \quad (12)$$

В обоих случаях из $\cos kl = 0 \Rightarrow A_{\sigma}(x) = \infty$, так как при этом частота возмущений ω совпадает с собственными частотами ω_n . Значит, резонанс приводит к бесконечным значениям амплитуды напряжений.

Здесь показаны графики амплитуд $H(x)$ вдоль стержня (рис.4, 3табл.). Графики резонансных частот не показаны, т.к. они стремятся к ∞ .

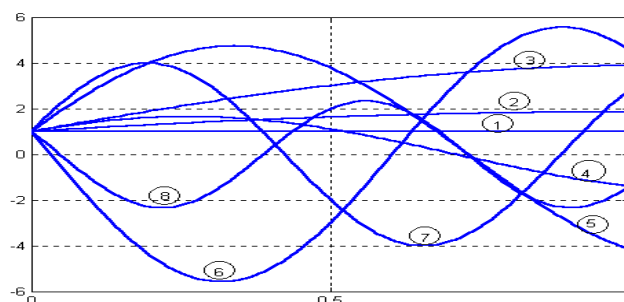


Рис.4. Графики амплитуд $H(x)$ от кинематических возмущений
 Fig.4. Plots of amplitudes $H(x)$ from kinematic perturbations

Таблица 3. Собственные частоты
 Table 3. Natural frequencies

n	1	2	3	4	5	6	7	8
ω_n	0,01	1	1,25	3,5	4	5,5	6,8	9,2

Напряжения в поперечных сечениях стержня при свободных колебаниях (ω_n). В процессе колебаний изменяются не только отклонения стержня $u(x, t)$, но и нормальные напряжения $\sigma(x, t)$ и продольная сила $N(x, t)$. Нормальные напряжения по закону Гука будут

$$\sigma(x, t) = E\varepsilon(x, t) = Eu'(x, t).$$

Далее в формуле соответствующие им продольные силы

$$N(x, t) = S\sigma(x, t) = ESu'(x, t)$$

Эти формулы определяют напряжения и продольную силу при свободных колебаниях. По результатам расчётов можно построить эпюры напряжений, которые позволяют проводить расчёты на прочность (рис.5, табл. 4).

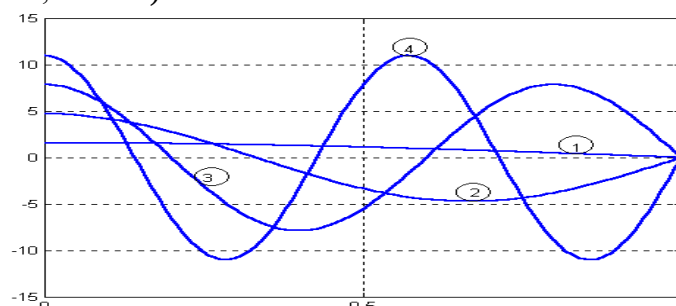


Рис.5. Спектры собственных частот ω_n и собственных форм $\varphi_n(x)$ колебания
 Fig.5. Spectra of eigenfrequencies ω_n and eigenmodes $\varphi_n(x)$ of oscillation

Таблица 4. Собственные частоты
 Table 4. Natural frequencies

n	1	2	3	4
ω_n	1,581	4,723	7,855	10,9965

Вывод. Рассмотрены математические модели задач, описывающие процессы колебаний стержней при динамических и кинематических возмущениях. Разработанные алгоритмы реализованы с помощью математической информационно-вычислительной системы программирования MatLab.

Создан комплекс программ расчета, позволяющий осуществлять решение задач о колебаниях стержней. Получены спектры собственных частот ω_n и собственных форм $\varphi_n(x)$ колеба-

ния, найдена $u(x, t)$ – функция смещения поперечных сечений в продольном направлении стержня.

Библиографический список:

1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
2. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1979. 416 с.
3. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, Глав. ред. физико-матем. лит., 1968. 560 с.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. 656 с.
5. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2002. 840 с.
6. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах. Том 1. Колебания линейных систем / Под ред. Болотина В.В. М.: Машиностроение. 352 с. (1978)
7. Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. Теория колебаний. М.: МГТУ, 2003. 272 с. (2003)
8. Хрущёва И.В. Основы математической статистики и теории случайных процессов: учебное пособие. СПб.: Издательство «Лань», 2009. 336 с.
9. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трёх томах. Том 3. Под редакцией Биргера И.А., Пановко Я.Г. М.: Машиностроение. 1968. 567 с.
10. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1964. 276 с.
11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
12. Старжинский В.М. Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1977. 256 с.
13. Культербаев Х.П. Основы теории колебаний. Основы теории, задачи для домашних заданий, примеры решений. Кабардино-Балкарский госуниверситет. Нальчик. 2003/ 130 с.
14. Культербаев Х.П., Абдул Салам И.М., Пайзулаев М.М. Свободные продольные колебания вертикального стержня с дискретными массами при наличии сил демпфирования. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2018; 45(3): 8-17. DOI:10.21822/2073-6185-2018-45-3-8-17
15. Культербаев Х.П. Кинематически возбуждаемые колебания континуально-дискретной многопролётной балки // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. №4, часть 2. Труды X Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Изд-во ННГУ им. Н.И.Лобачевского, 2011. С. 198-200.
16. Kh.P. Kulterbaev, L.A. Baragunova, M.M. Shogenova, M.A. Shardanova. The Solution of a Spectral Task on Variable Section Compressed Beams Vibrations by Numerical Methods. Materials Science Forum: 2019-08-05. ISSN: 1662-9752, Vol. 974, pp 704-710 Accepted: 2019-08-05. Online: 2019-12-06, 2020 Trans Tech Publications Ltd, Switzerland.
17. H.P. Kulterbayev, M.H. Alokova, L.A. Baragunova, Mathematical modeling of flexural vibrations of a vertical rod of variable section, The News of higher education institutions. North - Caucasion. region. Techn. sciences. 4 (2015), pp 100-106.
18. Культербаев Х.П., Чеченов Т.Ю. Свободные колебания континуально-дискретной многопролётной балки при учёте инерционных сил вращения // Наука, техника и технология XXI века (НТТ – 2009): материалы IV Международной научно-технической конференции. – Нальчик, КБГУ, 2009. – С. 313–317.
19. Kulterbaev Kh.P., Baragunova L.A., Shogenova M.M., Senov Kh. M. About a High-Precision Graphoanalytical Method of Determination of Critical Forces of an Oblate Rod. Proceedings 2018 IEEE International Conference "Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies" (IT&QM&IS). September, 24-28, 2018. St. Petersburg. Russia 2018. pp. 794-796.
20. Yong-Jun, Z., Shuan-Hai, H; Yi-Fan, S.; Xiao-Xing, Z. "Longitudinal seismic vibration of continuousation" . Journal of Chang'an University(natural science edition). Volume: 2,28. 2008-3. pp. 49-52

References:

1. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Partial derivative equations in mathematical physics. [Vysshaya shkola] Moscow: Higher School, 1970: 712. (In Russ)
2. Biderman, V.L. Applied Theory of Mechanical Vibrations. [Vysshaya shkola] Moscow: Higher School, 1979: 416. (In Russ)
3. Babakov I.M. Theory of Vibrations. M.: [Nauka], The Science. Chief Editor of Physical and Mathematical Literature, 1968: 560. (In Russ)
4. Samarsky A.A. Theory of difference schemes. M.: [Nauka], The Science. Chief Editor of Physical and Mathematical Literature, 1977: 656. (In Russ)
5. Verzhbitsky V.M. Fundamentals of numerical methods. [Vysshaya shkola] Moscow: Higher School, 2002: 840. (In Russ)
6. Vibrations in engineering. Reference book in six volumes. Vol. 1. Vibrations of linear systems (in Russian). Under edition of Bolotin V.V. Moscow: Mashinostroenie, 1978; 1; 1352. (In Russ)
7. Ilyin M.M., Kolesnikov K.S., Saratov Yu. MOSCOW: MSTU.2003: 272. (In Russ)
8. Khrushcheva I.V. Fundamentals of mathematical statistics and the theory of random processes: a training manual. Saint-Petersburg: Lan' Publisher, 2009: 336. (In Russ)
9. Strength, Stability, Vibrations. Reference book in three volumes. Vol. 3. Under the editorship of Birger I.A., Panovko Y.G. Moscow: Mashinostroenie. 1968: 567. (In Russ)
10. Panovko Ya.G. Introduction in the Theory of Mechanical Vibrations. M.: [Nauka], The Science. 1964: 276. (In Russ)
11. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. Equations of Mathematical Physics. M.: [Nauka], The Science .1977: 736. (In Russ)
12. Starzhinsky V.M. Applied methods of nonlinear oscillations. M.: [Nauka], The Science, Chief Editor of Physical and Mathematical Literature 1977: 256. (In Russ)
13. Kulterbaev Kh. P. Fundamentals of vibrational theory. Basics of theory, tasks for homework, examples of solutions. Kabardino-Balkarian State University. Nalchik, 2003:130 (In Russ)

14. Kulterbaev H. P., Abdul-Salam Igab Mazen, Payzulaev M.M. Free longitudinal vibrations of a vertical rod with discrete masses with damping forces. [Vestnik Dagestanskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Tekhnicheskkiye nauki] *Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences.* 2018; 45 (3): 8-17. (In Russ.) DOI:10.21822/2073-6185-2018-45-3-8-17(In Russ)
15. Kulterbaev H.P. Kinematically excited vibrations of a continuum-discrete multi-span beam. [Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I.Lobachevskogo] *Bulletin of N.I. Lobachevsky Nizhny Novgorod University.* Proceedings of X All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics. Publishing house of N.I.Lobachevsky NNSU, 2011; 4(2): 198-200. (In Russ)
16. Kh.P. Kulterbaev, L.A. Baragunova, M.M. Shogenova, M.A. Shardanova. The Solution of a Spectral Task on Variable Section Compressed Beams Vibrations by Numerical Methods. Materials Science Forum: 2019-08-05. ISSN: 1662-9752, 2019; 974: 704-710 Accepted: 2019-08-05. Online: 2019-12-06, 2020 Trans Tech Publications Ltd, Switzerland.
17. Kh.P. Kulterbayev, M.H. Alokova., L.A. Baragunova, Mathematical modeling of flexural vibrations of a vertical rod of variable section, The News of higher education institutions. North-Caucasion. region. Techn. Sciences. 2015; 4: 100-106.
18. Kulterbaev Kh.P., Chechenov T.Yu. The free vibrations of continuous-discrete multspan beam taking into account the inertial forces of rotation // Science, technology and technology of the XXI century (NTT - 2009): Proceedings of IV International Scientific and Technical Conference. - Nalchik, KBGU. 2009: 313-317. (In Russ)
19. Kulterbaev Kh.P., Baragunova L.A., Shogenova M.M., Senov Kh. M. About a High-Precision Graphoanalytical Method of Determination of Critical Forces of an Oblate Rod. Proceedings 2018 IEEE International Conference "Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies" (IT&QM&IS). September, 24-28, 2018. St. Petersburg. Russia 2018: 794-796.
20. Yong-Jun, Z.; Shuan-Hai, H.; Yi-Fan, S.; Xiao-Xing, Z. "Longitudinal seismic vibration of continuousation". *Journal of Chang'an University (Natural Science Edition)*. 2008-3 2(28): 49-52

Сведения об авторах:

Барагунова Лялюся Адальбиевна, старший преподаватель кафедры строительных конструкций и механики; baragunoval@mail.ru

Шогенова Марьяна Мухарбиевна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры строительных конструкций и механики; shogenova_mar@mail.ru

Information about the authors:

Lyalyusya A. Baragunova, Senior Lecturer, Department "Building Structures and Mechanics"; baragunoval@mail.ru

Maryana M. Shogenova, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Assoc. Prof., Assoc. Prof., Department "Building Structures and Mechanics"; shogenova_mar@mail.ru

Конфликт интересов/ Conflict of interest.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов/The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию/Received 30.04.2022.

Одобрена после/рецензирования Revised 19.05.2022.

Принята в печать/ Accepted for publication 19.05.2022.