

Алокова М.Х., Кухтербаев Х.П.

ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ

Alokova M.Kh., Kulterbaev Kh.P.

FLEXURAL VIBRATIONS OF THE VERTICAL ROD VARIABLE SECTION WITH A CONCENTRATED MASS

***Аннотация.** Рассматриваются изгибные колебания вертикального стержня переменного сечения с сосредоточенной массой. Изучаются колебания, возбуждаемые векторным гармоническим и случайным процессами с компонентами в виде кинематических и динамических возмущений. Определены амплитуды и среднеквадратические отклонения. Доказано, что влияние коррелированности компонентов случайных возмущений на колебания аналогично влиянию сдвига фаз на гармонические колебания. Превосходство среднеквадратических отклонений над амплитуд объясняется наличием первой резонансной частоты в спектральной плотности сонаправленных возмущений.*

***Ключевые слова:** колебания вертикального стержня, векторный процесс возмущений, спектральная матрица.*

***Abstract.** Flexural oscillations of the vertical rod of variable section with the concentrated weight are considered. The oscillations excited vectorial harmonic and accidental by processes with components in the form of kinematic and dynamic perturbations are studied. Amplitudes and mean squared deviations are determined.*

It is proved that influence of correlation of components of accidental perturbations on oscillations is similar to influence of phase shift on harmonic oscillations. Superiority of mean squared deviations over amplitudes is explained by existence of the first resonance frequency in spectral density the sonappravlennykh of perturbations.

***Key words:** oscillations of the vertical rod, vectorial process of perturbations, spectral matrix.*

Введение. Высокие вертикальные гибкие стержни (рис.1) широко используются в строительстве в качестве опор линий передач, мачт, прожекторов, антенных устройств и т.д. Постановка краевой задачи о свободных поперечных колебаниях вертикальных стержней постоянного сечения с учётом собственного веса, но без учёта сил сопротивления была рассмотрена в [1]. При этом было отмечено, что найти собственные значения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в замкнутой форме не удаётся.

В работах [2, 3] приближённым методом Релея-Ритца изучались родственные задачи для стержней постоянного сечения. Спектральная задача и вынуж-

денные поперечные колебания стержней постоянного и переменного сечений при отсутствии дискретных масс рассмотрена в [4, 5].

Постановка задачи. Вертикальный стержень (рис. 1а) длины l с погонной массой $m(x)$, с осевым моментом инерции поперечного сечения $J(x)$, с дискретной массой M_0 и осевым моментом инерции J_0 , из материала с модулем упругости E совершает плоские изгибные поперечные колебания, описываемые функцией $u(x, t)$.

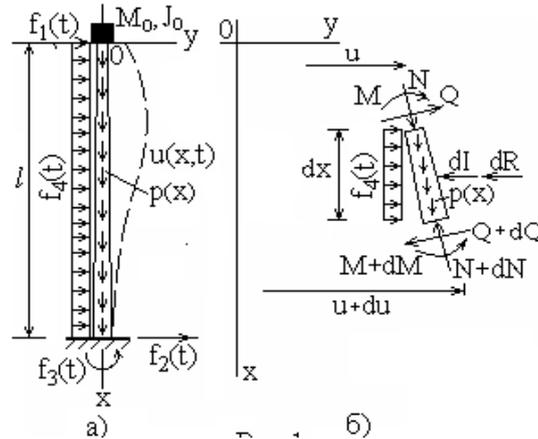


Рисунок 1 - Расчётная схема: а) общая схема, б) элемент стержня

Источником колебаний является векторный процесс возмущений

$$\mathbf{f}(t) = \{f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)\}.$$

Выделим элемент стержня (рис. 1б) с действующими силами: M – изгибающий момент, Q – поперечная сила, N – продольная сила, $f_4(t)$ – поперечная равномерно распределённая нагрузка, $p(x) = m(x)g$ – продольная неравномерно распределённая нагрузка, dI – дифференциал даламберовой силы инерции распределённой массы, dR – дифференциал силы вязкого трения.

Следующие силовые факторы находятся в известных соотношениях с параметрами

$$N(x) = M_0g + \int_0^x p(\xi)d\xi, \quad dI = m\ddot{u}dx, \quad dR = \eta m\dot{u}dx. \quad (1)$$

Здесь и далее точкой над переменными обозначены производные по времени, η – удельный коэффициент линейно-вязкого трения.

Пользуясь технической теорией изгибных колебаний балок и принципом Даламбера, получим дифференциальное уравнение частных производных гиперболического типа

$$bu'''' + 2b'u''' + Fu'' + pu' + m\ddot{u} + \eta m\dot{u} = f_4, \quad x \in (0, l), \quad t > -\infty, \quad b = EJ, \quad F = b'' + N \quad (2)$$

Штрихи в верхних индексах означают дифференцирование по координате x . В математическую модель колебаний в дополнение к основному уравнению (2) должны включаться граничные и начальные условия. Для свободных и вынужденных установившихся колебаний, рассматриваемых ниже, начальные условия не требуются.

Свободные колебания. В этом случае внешние воздействия отсутствуют, в силу чего основное уравнение (2) становится однородным

$$bu'''' + 2b'u'''' + Fu'' + pu' + m\ddot{u} + \eta m\dot{u} = 0, \quad x \in (0, l), \quad t > -\infty \quad (3)$$

Следует заметить, что условиям закрепления концов стойки, изображённым на рис. 1а, соответствуют следующие однородные граничные условия:

$$b(0)u''(0,t) - J_0\ddot{u}'(0,t) = 0, \quad [b(0)u''(0,t)]' - M_0\ddot{u}(0,t) = 0, \quad (4)$$

$$u(l,t) = 0, \quad u'(l,t) = 0 \quad (5)$$

Далее необходимо определить спектры собственных значений и функций задачи (3) - (5).

Пользуясь методом разделения переменных, представим $u(x, t)$ как произведение

$$u(x, t) = X(x)e^{\lambda t}, \quad (6)$$

где

$$\lambda = -\mu + j\omega \quad (7)$$

- характеристический показатель, (μ, ω) - собственная пара, состоящая из коэффициента затухания и частоты свободных колебаний, j - мнимая единица.

Подстановка (6) в (4), (5) даёт

$$bX'''' + 2b'X'''' + FX'' + pX' + m\lambda(\lambda + \eta)X = 0, \quad x \in (0, l) \quad (8)$$

$$b'(0)X''(0) + b(0)X''''(0) - M_0\lambda^2 X(0) = 0, \quad b(0)X''(0) - J_0\lambda^2 X'(0) = 0, \quad (9)$$

$$X'(l) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (10)$$

Определить λ аналитическими методами не удаётся.

Выход состоит в применении метода конечных разностей [6] и переходе от аналитической модели (8) - (10) к численной.

Введём сетку с шагом $h = l/(n-1)$ и вместо функции непрерывного аргумента $X(x)$ сеточную функцию дискретного аргумента $y(x_i) = y_i$, i - номер узла сетки. Таким образом, далее $X(x)$ будет представляться вектором $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Замена производных с точностью $O(h^2)$ в (8) по обычным правилам метода приведёт к алгебраическим уравнениям

$$r_i y_{i-2} + c_i y_{i-1} + d_i y_i + e_i y_{i+1} + s_i y_{i+2} = 0, \quad i = 3, 4, \dots, n-2, \quad (11)$$

где обозначено

$$r_i = b_i - hb'_i, \quad c_i = -4b_i + 2hb'_i + h^2 F_i - 0,5h^3 p_i,$$

$$d_i = 6b_i - 2h^2 F_i + h^4 m_i \lambda(\lambda + \eta), \quad e_i = -4b_i - 2hb'_i + h^2 F_i + 0,5h^3 p_i, \quad s_i = b_i + hb'_i.$$

Аналогичные замены произведём в граничных условиях (9), (10) и получим

$$\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 + \delta y_4 + \varepsilon y_5 = 0, \quad \nu y_1 + \theta y_2 + \kappa y_3 + \xi y_4 = 0, \quad y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n = 0, \quad y_n = 0$$

Здесь

$$\alpha = 4b'_1 h - 5b_1 - 2M_0 \lambda^2 h^3, \quad \beta = -10b'_1 h + 18b_1, \quad \gamma = 8b'_1 h - 24b_1, \quad \delta = -2b'_1 h + 14b_1,$$

$$\varepsilon = -3b_1, \quad \nu = 4b_1 + 3J_0 \lambda^2 h, \quad \theta = -10b_1 - 4J_0 \lambda^2 h, \quad \kappa = 8b_1 + J_0 \lambda^2 h, \quad \xi = -2b_1.$$

Запишем (11), (12) как линейную однородную алгебраическую систему уравнений

$$G(\lambda)Y = 0. \quad (13)$$

$G(\lambda)$ - квадратная разреженная матрица порядка n .

Элементы матрицы G являются функциями λ , т. е. собственного значения задачи (7) - (9).

Условие существования нетривиального решения системы уравнений (13) даёт характеристическое уравнение

$$\det G(\lambda) = 0, \tag{14}$$

из которого определяются собственные значения, т. е. спектр $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$.

Уравнение (14) с учётом того, что его левая часть представляет комплексную функцию, можно переписать в виде

$$v_1(\mu, \omega) + jv_2(\mu, \omega) = 0.$$

Отсюда следует, что коэффициент затухания μ и частота свободных колебаний ω должны определяться из системы двух нелинейных алгебраических уравнений

$$v_1(\mu, \omega) = 0, \quad v_2(\mu, \omega) = 0. \tag{15}$$

Её решение будем находить с помощью метода координатного спуска [6].

Пример 1. Определим собственные значения и функции свободных колебаний стального стержня круглого поперечного сечения с параметрами:

$$\begin{aligned} l = 18 \text{ м}, \quad n = 601, \quad \eta = 0,02 \text{ с}^{-1}, \quad E = 210 \text{ ГПа}, \\ M_0 = 1000 \text{ кг}, \quad J_0 = 200 \text{ кгм}^2, \quad m(x) = 16 + 0,7x \text{ кг/м}, \\ J = ax + c \text{ м}^4, \quad a = 0,0000002 \text{ м}^3, \quad c = 0,0000007 \text{ м}^4. \end{aligned}$$

Метод координатного спуска дал следующие значения собственных значений

$$\omega = \{8,90, \quad 26,30 \quad 52,96\} \text{ с}^{-1}, \quad \mu = 0,01 \text{ с}^{-1}.$$

Спектр собственных векторов, может быть найден с помощью системы уравнений (13). Первые три показаны на рис. 2.

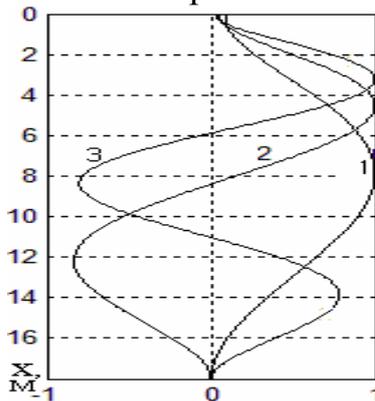


Рисунок 2 - Первые собственные функции колебаний

Данные графики не похожи на приводимые в литературе для консольных балок и вертикальных стержней постоянного сечения, не несущих сосредоточенные массы. Причина в том, что инертная дискретная масса на верхнем конце создаёт эффект закрепления и собственные функции становятся подобными аналогичным кривым для стержня с неподвижными концами.

Вынужденные колебания при гармонических возмущениях. Теперь основное уравнение и граничные условия в совокупности образуют задачу

$$bu'''' + 2b'u'''' + Fu'' + pu' + m\ddot{u} + \eta m\dot{u} = f_4, \quad x \in (0, l), \quad t > -\infty. \quad (16)$$

$$b(0)u''(0,t) - J_0\ddot{u}'(0,t) = 0, \quad [b(0)u''(0,t)]' - M_0\ddot{u}(0,t) = f_1(t), \quad u(l,t) = f_2(t), \quad u'(l,t) = f_3(t). \quad (17)$$

Четыре возмущения являются компонентами векторного гармонического процесса

$$\mathbf{f}(t) = \{f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)\},$$

которые имеют частоты Ω_k и начальные фазы ψ_k

$$f_k(t) = a_k e^{j(\Omega_k t + \psi_k)}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (18)$$

Здесь a_k – вещественная амплитуда гармонических возмущений. Введём обозначение для комплексной амплитуды

$$A_k = a_k e^{j\psi_k}$$

и упростим описание возмущений

$$f_k(t) = A_k e^{j\Omega_k t}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (19)$$

Выходной процесс $u(x, t)$ в общем случае не будет гармоническим и, даже, периодическим. В то же время он будет суммой трёх гармоник с разными частотами Ω_k .

Периодическими такие колебания будут в том случае, если отношения Ω_j/Ω_k ($j \neq k$) окажутся рациональными числами. Если $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4 = \Omega$, то выходной процесс будет гармоническим. Для этой задачи можно определять, кроме решения $u(x, t)$, и амплитуду колебаний. Рассмотрим данный случай подробно.

Решение задачи (16), (17) ищется с помощью метода разделения переменных как произведение

$$u(x, t) = X(x)e^{\lambda t}, \quad (20)$$

где

$$\lambda = j\Omega \quad (21)$$

- характеристический показатель, $X(x)$ – функция амплитуды вынужденных колебаний, подлежащая определению.

Подставим (20) в (16), (17) и получим

$$bX + 2b'X'' + F_1X'' + pX' + m\Lambda X = A_4, \quad \Lambda = \lambda(\lambda + \eta), \quad x \in (0, l). \quad (22)$$

$$b'(0)X''(0) + b(0)X'''(0) - M_0\lambda^2 X(0) = 0, \quad b(0)X''(0) - J_0\lambda^2 X'(0) = A_1, \quad (23)$$

$$X(l) = A_2, \quad X'(l) = A_3.$$

От дифференциального уравнения (22) перейдём к конечноразностной схеме. Можно показать, что будет получено конечноразностное уравнение

$$f_i y_{i-2} + c_i y_{i-1} + d_i y_i + e_i y_{i+1} + s_i y_{i+2} = q_i, \quad q_i = A_4 h^4, \quad i = 3, 4, \dots, n-2, \quad (24)$$

где коэффициенты имеют прежние значения, но с учётом (21).

Граничные условия (23) приведём в соответствие с методом конечных разностей и запишем:

– на верхнем конце:

$$\nu y_1 + \theta y_2 + \kappa y_3 + \xi y_4 = 0, \quad \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 + \delta y_4 + \epsilon y_5 = q_2, \quad q_2 = 2A_1 h^3. \quad (25)$$

– на нижнем конце:

$$y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n = q_{n-1}, \quad q_{n-1} = 2hA_3, \quad y_n = q_n, \quad q_n = A_2 \quad (26)$$

Уравнения (24) - (26) образуют неоднородную алгебраическую систему, которую можно переписать в матрично-векторной форме

$$\mathbf{G}(\lambda)\mathbf{y} = \mathbf{q}, \quad (27)$$

где $\mathbf{G}(\lambda)$ - квадратная матрица порядка n ,

$$\mathbf{q} = \{0, q_2, q_3, \dots, q_{n-2}, q_{n-1}, q_n\}.$$

Система уравнений даёт вектор \mathbf{Y} и амплитуду

$$a_u(x_i) = |\mathbf{Y}|.$$

Пример 2. Рассмотрим действие гармонических возмущений $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$ на вертикальный стержень с параметрами примера 1.

В качестве вещественных амплитуд возмущений возьмём

$$a_1 = 50 \text{ Н}, \quad a_2 = 0,05 \text{ м}, \quad a_3 = 0,001 \text{ рад}, \quad a_4 = 15 \text{ Н/м}.$$

Изучим влияние возрастающих значений частоты возмущений

$$\Omega = \{0, 0,6, 1, 4,9, 19, 25\} \text{ с}^{-1}$$

на амплитуду колебаний при отсутствии сдвига фаз, т. е. при

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 0.$$

Результаты счёта показаны кривыми на рис. 3. Кривая 1 соответствует статическому нагружению, кривые 2, 3 - возмущениям с весьма малыми частотами. Эти колебания происходят по форме статических прогибов.

Далее рост частот возмущений (кривая 4) приближает колебания к резонансным, амплитуды возрастают, мода колебаний становится подобной первой собственной форме на рис. 2. Далее колебания происходят уже по второй и третьей собственным функциям (кривые 5, 6).

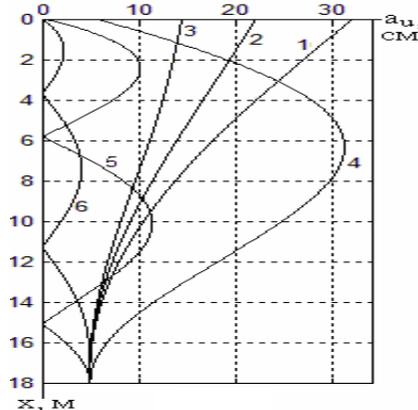


Рисунок 3 - Амплитуды колебаний при возрастании частот возмущений

Пример 3. Рассмотрим колебания вертикального стержня при различных сдвигах фаз возмущений, но одинаковых частотах

$$\omega = 4 \text{ с}^{-1}.$$

Сходная задача рассматривалась в работе [7].

Изучим влияние начальных фаз ψ на амплитуду колебаний. Существенное значение будут иметь не величины начальных фаз, а разницы между ними (сдвиги фаз). Наиболее характерными будут три случая:

$$\Psi = [(0, 0, 0, 0); \quad (0, -\pi, -\pi, 0); \quad (0, -\pi/2, -\pi/2, 0)].$$

Результаты счёта по компьютерной программе представлены на рис. 4.

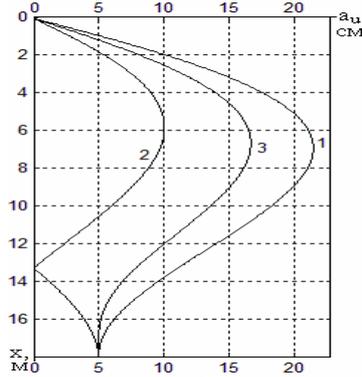


Рисунок 4 - Амплитуды колебаний при сдвигах фаз возмущений

Первая из кривых соответствует синфазным возмущениям. Поэтому амплитуды имеют наибольшие значения. Во втором случае (кривая 2), кинематические возмущения нижнего конца направлены против динамических нагрузок, т. е. отстают от них на π . Поэтому амплитуды существенно уменьшились. При этом по очевидной причине нижний и средний участки стержня колеблются в противофазе. В третьем варианте (кривая 3), амплитуда принимает промежуточные значения.

Вынужденные колебания при случайных возмущениях. Зачастую источники колебаний являются случайными (сейсмика, атмосферная турбулентность и т.д.). Поэтому перейдём теперь от детерминистического варианта краевой задачи (16), (17) к стохастической. В таком случае векторный процесс возмущений $f(t)$ будет стационарным, стационарно связанным центрированным случайным процессом с заданной спектральной матрицей, обладающей свойством эрмитовости

$$S_f(\omega) = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}, \quad s_{jk}(\omega) = s_{kj}^*(\omega) \quad (28)$$

Здесь и далее звёздочка означает переход к комплексно-сопряжённым величинам. Теперь $u(x, t)$ будет пространственно-временным случайным полем.

Далее будем изучать стационарный случайный процесс колебаний, поэтому начальные условия не потребуются. Определим по заданной спектральной матрице (28) спектральную плотность $S_u(x, \omega)$ случайного поля отклонений стержня и дисперсию. Для определения спектральной плотности $S_u(x, \omega)$ воспользуемся вектором передаточных функций $\mathbf{H}(x, i\omega)$, элементы которого суть реакции стержня на гармонические возмущения с единичной амплитудой. Например, $H_1(x, i\omega)$ является комплексной амплитудой колебаний стойки при единичном возмущении $z_1(t) = e^{j\omega_1 t}$. Спектральная плотность перемещений, а далее и дисперсия определяются по известным соотношениям

$$S_u(x, \omega) = \mathbf{H}^T(x, i\omega) S_f(\omega) \mathbf{H}^*, \quad D_u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(x, \omega) d\omega. \quad (29)$$

Возьмём компоненты вектора в виде процессов со скрытой периодичностью (характерными частотами). В таком случае элементы спектральной матрицы S_f можно представить в виде

$$s_{kl}(\omega) = \frac{2\alpha_{kl}\theta_{kl}^2\rho_{kl}\sigma_k\sigma_l}{\pi[(\omega^2 - \theta_{kl}^2)^2 + 4\alpha_{kl}^2\omega^2]}, \quad \theta_{kl}^2 = \alpha_{kl}^2 + \beta_{kl}^2, \quad k, l = 1, 2, 3, 4,$$

где α_{kl}, β_{kl} – параметры широкополосности и характерной частоты, ρ_{kl} – элементы неотрицательно определённой корреляционной матрицы, $|\rho_{kl}| \leq 1, \rho_{kk}=1; \sigma_k, \sigma_l$ – среднеквадратические отклонения возмущений.

Интегрирование в правой части (29) выполняется численными методами.

Пример 4. Рассмотрим случайные колебания стержня из предыдущих примеров при следующих значениях параметров случайных возмущений в системе единиц СИ:

$$\alpha_{kl} = 0,01, \beta_{kl} = \{0 \ 0,6 \ 14,9 \ 19 \ 25\}, \sigma_k = \{50 \ 0,05 \ 0,001, \ 15\}, \rho_{kl} = 1, k, l = 1, 2, 3, 4.$$

Заметим, что такие входные данные делают данную задачу стохастическим аналогом детерминистической задачи примера 2.

Результаты вычислений представлены на рис. 5. Сравнение кривых рис. 3 и рис. 5 обнаруживает аналогию между случайными и гармоническими колебаниями. Трансформации кривых при росте частот возмущений примерно одинаковые. Как и в гармонических колебаниях, рост характерной частоты возмущений приводит к понижению среднеквадратических отклонений (кривые 1, 2, 3). При малых значениях β_{kl} колебания происходят по форме статических прогибов. Далее при повышении частоты они сменяются колебаниями, по форме подобными второй и третьей собственным формам (кривые 4, 5, 6).

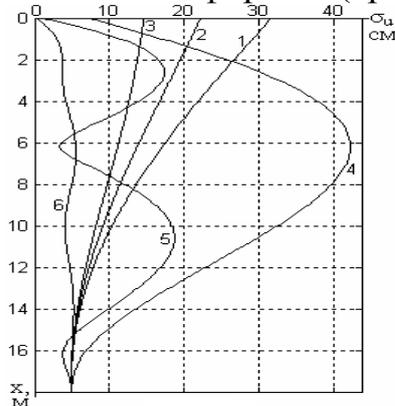


Рисунок 5 - Среднеквадратические отклонения при возрастании характерных частот случайных возмущений

Сравнение двух рисунков обнаруживает характер влияния параметра широкополосности α_{kl} на случайные процессы возмущений. Из-за наличия шумовых составляющих, определяемых ими, в случайном процессе содержатся частоты, совпадающие с собственными частотами. Поэтому среднеквадратические отклонения получаются несколько большими, чем соответствующие амплитуды. По аналогии с изучением роли сдвига фаз возмущений в детерминистической задаче теперь рассмотрим влияние коррелированности компонентов вектора случайных возмущений на колебания. С этой целью зафиксируем параметры характерных частот и широкополосности на значениях

$$\beta_{jk} = 4 \text{ с}^{-1}, \quad \alpha_{jk} = 0,01 \text{ с}^{-1}, \quad j, k = 1, 2, 3, 4.$$

Три случая сдвига фаз возмущений, имевшие место в детерминистической задаче примера 3 промоделируем с помощью трёх соответствующих нормированных корреляционных матриц

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Результаты вычислений представлены на рис. 6. Номера кривых соответствуют номерам корреляционных матриц. Сравнение кривых рис. 4 и рис. 6 показывает их сходство.

Влияние коррелированности компонентов случайных возмущений на колебания аналогично влиянию сдвига фаз на гармонические колебания.

Некоторое превосходство среднеквадратических отклонений над амплитудами (кривые 1, 3) объясняется наличием первой резонансной частоты в спектральной плотности сонаправленных возмущений.

Обратное имеет место при противодействии возмущений (кривые 2). Здесь также причина создаёт усиление взаимопомех.

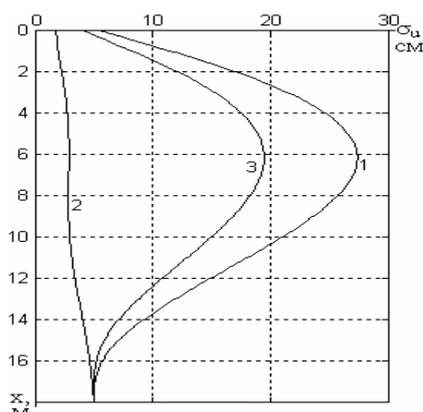


Рисунок 6 - Влияние коррелированности случайных возмущений на среднеквадратические отклонения

Вывод:

1. Наличие дискретной массы на верхнем конце вертикального стержня создаёт эффект его «закреплённости» при колебаниях.
2. При низкочастотных колебаниях вертикальных стержней формы колебаний совпадают с формами статических прогибов.
3. При гармонических колебаниях формы и амплитуды колебаний стержня существенно зависят не только от частоты возмущений, но и от сдвига их фаз.
4. При случайных колебаниях формы и среднеквадратические отклонения прогибов колебаний стержня существенно зависят не только от доминирующей частоты возмущений, но и от степени коррелированности компонентов векторного процесса возмущений.

Библиографический список:

1. Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука. 1968. 504с.
2. Kim C.S., Dickinson S.M. On the analysis of laterally vibrating slender beams subject to various complicating effects. J. Sound and Vibr.. 1988. 122, N 3, pp. 441-455.
3. Auciello N. M. A study of the numerical convergence of Rayleigh-Ritz method for the free vibrations of cantilever beam of variable cross-section with tip mass. Eng. Trans.. 1996. 44, N 3-4, pp. 375-388.
4. Алокова М.Х. Свободные колебания вертикальной стойки переменного сечения. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов. (Казань, 20-24 августа 2015 г.). Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. С. 135-137.
5. Культербаев Х.П. Колебания вертикальной стойки переменного сечения при гармонических и случайных векторных возмущениях. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов. (Казань, 20-24 августа 2015 г.). Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. С. 2181-2184.
6. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2002. 840 с.
7. Культербаев Х.П. Колебания дискретно-континуальной балки, кинематически возбуждаемые гармоническими и случайными векторными процессами // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки. 2012. № 3. С. 54-59.

References:

1. L. Collatz is the Task on eigenvalues (with technical Annex-mi). Moscow: Nauka. 1968.504p.
2. Kim C. S., Dickinson S. M. On the analysis of laterally vibrating slender beams subject to various complicating effects. J. Sound and Vibr. 1988. 122, N. 3, pp. 441-455.
3. Auciello N. M. A study of the numerical convergence of Rayleigh-Ritz method for the free vibrations of cantilever beam of variable cross-section with tip mass. Eng. Trans.1996.44, No.3-4, pp.375-388.
4. Alakova M. H. Free vibrations of a vertical rack of variable cross section. XI all-Russian Congress on fundamental problems of theoretical and applied mechanics: collection of papers. (Kazan, August 20-24, 2015). Kazan: Publishing house of Kazan.Universitypress, 2015. pp. 135-137.
5. Kulterbaev H. P. Upright Vibrations of variable cross section under harmonic and random vector perturbations. XI All-Russian Congress on fundamental problems of theoretical and applied mechanics: collection of papers. (Kazan, August 20-24, 2015). Kazan: Publishing house of Kazan. University press, 2015 - pp. 2181-2184.
6. Verzhbitsky V. M. Fundamentals of numerical methods. M.: Higher school, 2002. 840p.
7. Kulterbaev H. P. Oscillations of discrete-continuous beam is kinematically excited by harmonic and stochastic vector processes, Izv. universities. North.-Caucasus region. Tekhn. sciences.- 2012. No.3. pp. 54-59.